

**Teilaufgabe 1.0**

Gegeben ist die reelle Funktion f in der in \mathbb{R} maximalen Definitionsmenge D_f durch

$$f(x) := \arctan\left(\frac{3 \cdot x^2}{1 - 2 \cdot x}\right) \text{ mit } x \in \mathbb{R}. \text{ und } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Geben Sie die Definitionsmenge D_f sowie Nullstelle von f an, und untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow 0.5$ sowie für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$. Geben Sie die Gleichungen der horizontalen Asymptoten des Graphen von f an.

Argumentfunktion: $h(x) := \frac{3 \cdot x^2}{1 - 2 \cdot x}$

Definitionslücke: $n(x) := \text{denom}(h(x)) = 2 \cdot x - 1$

$$n(x) = 0 \rightarrow 2 \cdot x - 1 = 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow \frac{1}{2}$$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

Nullstellenbedingung: $z(x) := \text{numer}(h(x)) \rightarrow -3 \cdot x^2$

$$z(x) = 0 \rightarrow -3 \cdot x^2 = 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nullstelle: **N(0/0)**

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{3 \cdot x^2}{1 - 2 \cdot x} \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{3 \cdot x^2}{1 - 2 \cdot x} \rightarrow -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 \cdot x^2}{1 - 2 \cdot x} \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

horizontale Asymptote

$$y_1 := \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot x^2}{1 - 2 \cdot x} \rightarrow -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

horizontale Asymptote

$$y_2 := -\frac{\pi}{2}$$

Teilaufgabe 1.2 (8 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen die Funktion streng monoton ist, und ermitteln Sie Art und Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von f.

[Zwischenergebnis: $f'(x) = \frac{6 \cdot x - 6 \cdot x^2}{(1 - 2 \cdot x)^2 + 9 \cdot x^4}$]

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{3 \cdot x^2}{1 - 2 \cdot x}\right)^2} \cdot \frac{(1 - 2 \cdot x) \cdot 6 \cdot x - 3 \cdot x^2 \cdot (-2)}{(1 - 2x)^2} = \frac{1}{(1 - 2 \cdot x)^2 + 9 \cdot x^4} \cdot (6 \cdot x - 12 \cdot x^2 + 6 \cdot x^2)$$

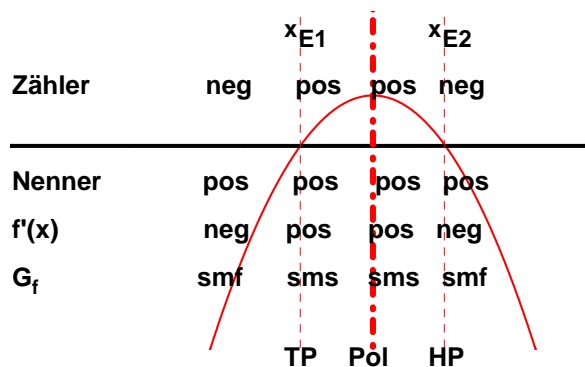
$$f'(x) := \frac{6 \cdot x - 6 \cdot x^2}{(1 - 2 \cdot x)^2 + 9 \cdot x^4}$$

Horizontale Tangenten:

$$z'(x) := \text{numer}(f'(x)) \rightarrow 6 \cdot x - 6 \cdot x^2 \quad x_E := z'(x) = 0 \rightarrow 6 \cdot x - 6 \cdot x^2 = 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Extrema abrufen: $x_{E1} := x_{E_1} \quad x_{E2} := x_{E_2}$

$$x_{E1} = 0 \quad x_{E2} = 1$$



$$f(0) = 0$$

$$TP(0 / 0)$$

$$f(1) = -\text{atan}(3) = -1.25$$

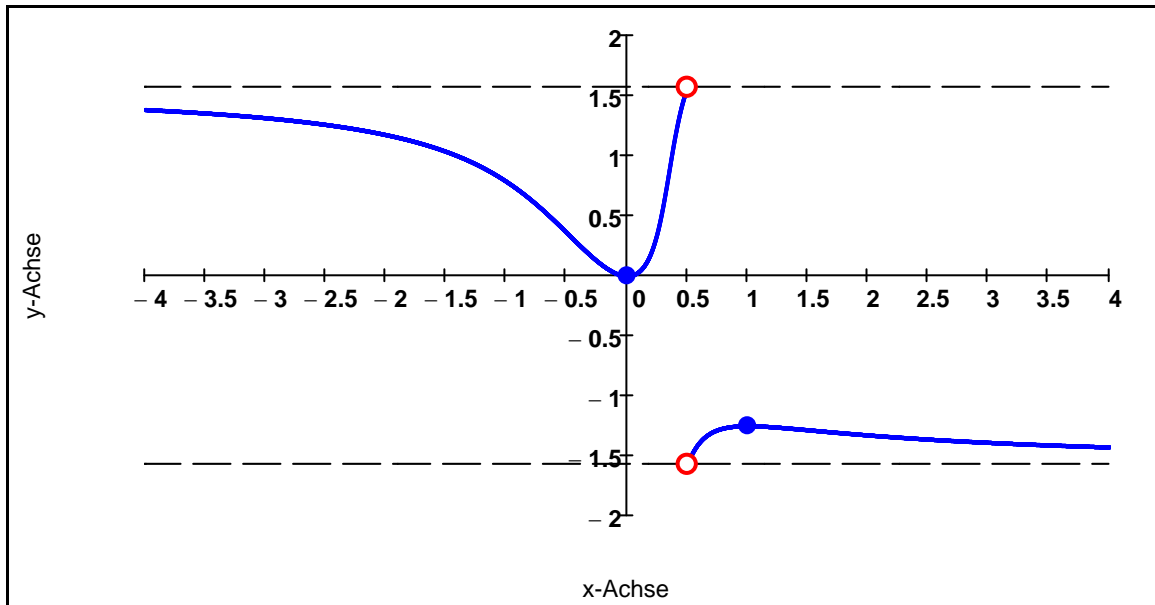
$$HP(1 / -\arctan(3))$$

G_f ist streng monoton fallend in $] -\infty ; 0]$ und $[1 ; \infty [$

G_f ist streng monoton steigend in $[0 ; \frac{1}{2} [$ und $] \frac{1}{2} ; 1]$

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen von f und seine horizontalen Asymptoten für $-1 \leq x \leq 2$ in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 4 cm ein, und geben Sie die Wertemenge von f an.



Wertemenge: $W =] \frac{-\pi}{2}; -\arctan(3)] \cup [0; \frac{\pi}{2} [$

Teilaufgabe 1.4 (6 BE)

Gegeben ist die Integralfunktion F durch $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ und $D_F =] -\infty; 0.5 [$.

Geben Sie die Anzahl und die Lage der Nullstellen von F sowie das Krümmungsverhalten des Graphen von F und die Abszisse seines Wendepunktes an, ohne das Integral zu berechnen, und begründen Sie Ihre Antworten.

$$F(-1) = \int_{-1}^{-1} f(t) dt = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -1 \quad \text{ist eine Nullstelle von } F$$

$$\text{Monotonie von } F \quad \Leftrightarrow \quad \text{Verhalten von } F' \quad \Leftrightarrow \quad \text{Verhalten von } f$$

$$f(x) > 0 \text{ f\"ur } x < 0 \quad \Rightarrow \quad G_F \text{ ist streng monoton steigend} \quad \Rightarrow \quad x_0 = -1 \quad \text{einzige Nullstelle}$$

$$\text{Krümmungsverhalten von } F \quad \Leftrightarrow \quad \text{Verhalten von } F'' \quad \Leftrightarrow \quad \text{Verhalten von } f'$$

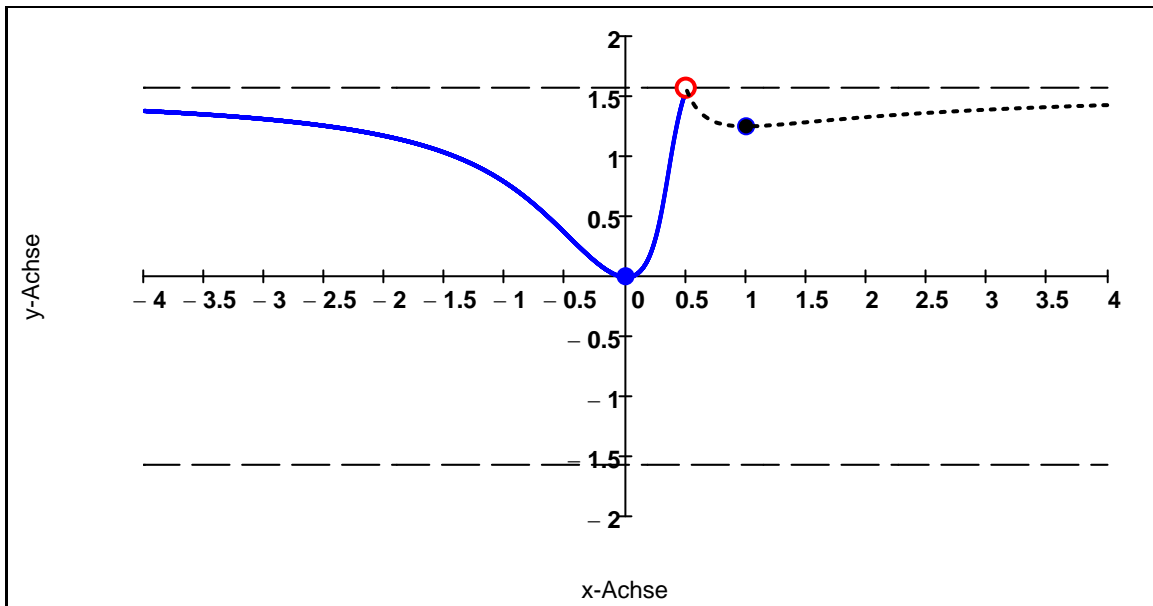
$$G_F \text{ ist rechtsgekrümmt in }] -\infty; 0] \text{ und linksgekrümmt in } [0; \frac{1}{2} [\Rightarrow \text{Wendepunkt } x_W = 0$$

Teilaufgabe 1.5 (5 BE)

Gegeben ist eine Funktion g durch $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x < 0.5 \\ (-f(x)) & \text{if } x > 0.5 \end{cases}$.

Zeigen Sie, dass $x = 0.5$ eine stetig behebbar Definitions-lücke von g ist, und geben Sie die stetige Fortsetzung g_- von g an. Untersuchen Sie, ob g_- an der Stelle $x = 0.5$ differenzierbar ist.

Graphische Darstellung nicht verlangt:



linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \arctan\left(\frac{3 \cdot x^2}{1 - 2 \cdot x}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ ist stetig behebbar Def.lücke

rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} -\arctan\left(\frac{3 \cdot x^2}{1 - 2 \cdot x}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

stetige Fortsetzung:

$$g_-(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x < 0.5 \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0.5 \\ (-f(x)) & \text{if } x > 0.5 \end{cases}$$

Ableitungsfunktion:

$$g'_{-}(x) = \begin{cases} \frac{6 \cdot x - 6 \cdot x^2}{(1 - 2 \cdot x)^2 + 9 \cdot x^4} & \text{if } x < 0.5 \\ \frac{-(6 \cdot x - 6 \cdot x^2)}{(1 - 2 \cdot x)^2 + 9 \cdot x^4} & \text{if } x > 0.5 \end{cases}$$

linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{6 \cdot x - 6 \cdot x^2}{(1 - 2 \cdot x)^2 + 9 \cdot x^4} \rightarrow \frac{8}{3}$$

rechtsseitiger Grenzwert:

\Rightarrow bei $x = \frac{1}{2}$ nicht differenzierbar

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{-(6 \cdot x - 6 \cdot x^2)}{(1 - 2 \cdot x)^2 + 9 \cdot x^4} \rightarrow -\frac{8}{3}$$

Teilaufgabe 2.0

Gegeben ist eine Schar reeller Funktionen h_k in der in \mathbb{R} maximalen Definitionsmenge D_{h_k}

durch $h_k(x) = \frac{e^x}{(k + e^x)^3}$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Teilaufgabe 2.1 (6 BE)

Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_{h_k} in Abhängigkeit von k .

Untersuchen Sie das Verhalten von $h_k(x)$ für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$, sowie für den Fall, dass eine Definitionslücke vorliegt, in der Umgebung dieser Definitionslücke.

Nullstelle des Nenners: $n(x, k) := (k + e^x)^3$

$n(x, k) = 0 \rightarrow (k + e^x)^3 = 0$ auflösen, $x \rightarrow \ln(-k)$

keine Lösung, falls $k > 0 \Rightarrow D_{h_k} = \mathbb{R}$

Definitionslücke, falls $k < 0 \Rightarrow D_{h_k} = \mathbb{R} \setminus \{ \ln(-k) \}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{(k + e^x)^3} \rightarrow 0$$

0

↑

↓

k^3

∞

↑ I. H.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{(k + e^x)^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{3 \cdot (k + e^x)^2 \cdot e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3 \cdot (k + e^x)^2} = 0$$

↓

∞

↓

∞

$$\begin{array}{c}
 -k > 0 \\
 \uparrow \\
 \lim_{x \rightarrow \ln(-k)^-} \frac{e^x}{(k + e^x)^3} \text{ annehmen, } k < 0 \rightarrow -\infty \\
 \downarrow \\
 0^-
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 -k > 0 \\
 \uparrow \\
 \lim_{x \rightarrow \ln(-k)^+} \frac{e^x}{(k + e^x)^3} \text{ annehmen, } k < 0 \rightarrow \infty \\
 \downarrow \\
 0^+
 \end{array}$$

Teilaufgabe 2.2 (8 BE)

Bestimmen Sie Art und Koordinaten der lokalen Extrempunkte der Graphen von h_k in Abhängigkeit von k sowie die Gleichung der geometrischen Ortskurve, auf der all diese Extrempunkte liegen.

Funktionsterm:
$$h(x, k) := \frac{e^x}{(k + e^x)^3}$$

1. Ableitung:
$$h'(x, k) := \frac{d}{dx} h(x, k) \rightarrow \frac{e^x \cdot (k - 2 \cdot e^x)}{(k + e^x)^4}$$

Horizontale Tangenten:
$$h'(x, k) = 0 \Leftrightarrow x_E(k) := k - 2 \cdot e^x = 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow \ln\left(\frac{k}{2}\right)$$

Extrempunkt existiert, falls $k > 0$:

$$k - 2 \cdot e^x > 0 \left| \begin{array}{l} \text{auflösen, } x \\ \text{annehmen, } k > 0 \end{array} \right. \rightarrow x < \ln\left(\frac{k}{2}\right) \quad G_f \text{ ist streng mon. steigend für } x < \ln\left(\frac{k}{2}\right)$$

$$k - 2 \cdot e^x < 0 \left| \begin{array}{l} \text{auflösen, } x \\ \text{annehmen, } k > 0 \end{array} \right. \rightarrow \ln\left(\frac{k}{2}\right) < x \quad G_f \text{ ist streng mon. fallend für } x > \ln\left(\frac{k}{2}\right)$$

$$y_E(k) := h(x_E(k), k) = \frac{4}{27 \cdot k^2} \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt } H\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right), \frac{4}{27 \cdot k^2}\right) \quad \text{mit } k > 0$$

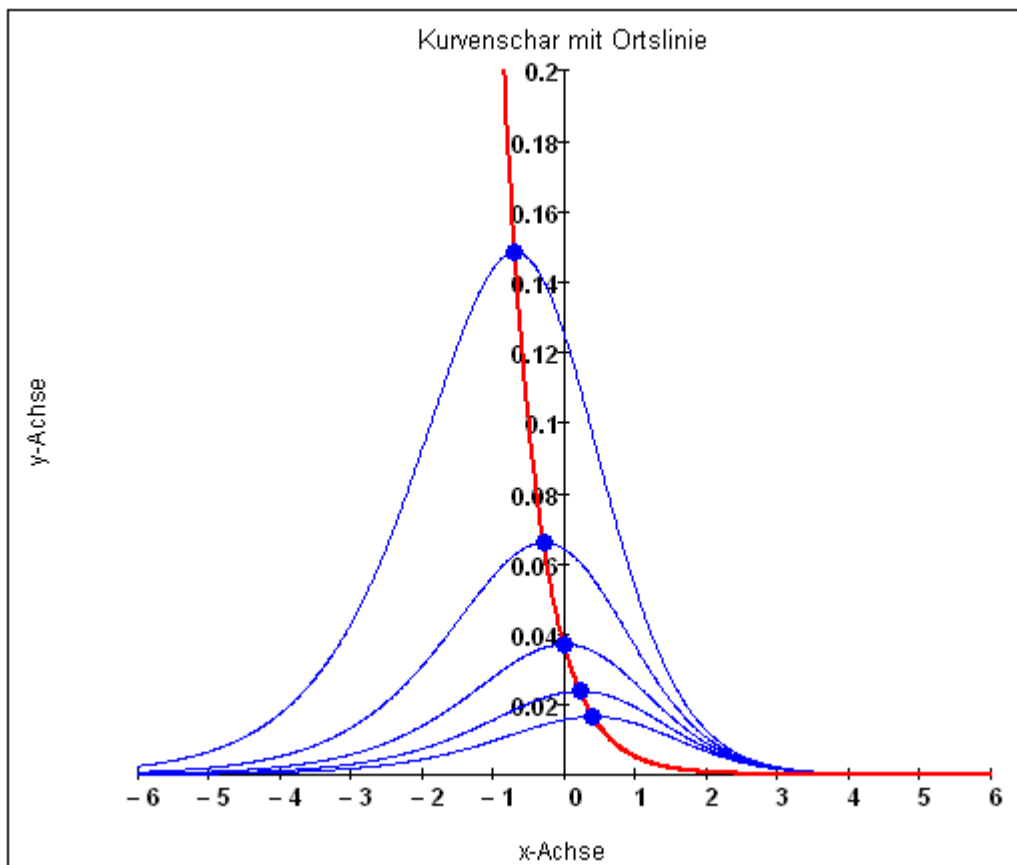
Bestimmung des geometrischen Ortes:

Vorgabe

$$x = \ln\left(\frac{k}{2}\right) \qquad y = \frac{4}{27 \cdot k^2}$$

$$\text{Suchen}(k, y) \text{ annehmen} \rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 \cdot e^x \\ e^{-2 \cdot x} \\ 27 \end{pmatrix} & \text{if } \text{Im}(x) \leq \pi \wedge 0 < \pi + \text{Im}(x) \\ \text{undefined} & \text{if } \pi < \text{Im}(x) \vee \pi \leq -\text{Im}(x) \end{cases}$$

Ortslinie: $O(x) := \frac{e^{-2 \cdot x}}{27}$



Teilaufgabe 2.3 (6 BE)

Berechnen Sie für $k \in \mathbb{R}^+$ den Wert des Integrals $J = \int_0^1 h_k(x) dx$ in Abhängigkeit von k .

$$J(k) = \int_0^1 \frac{e^x}{(k + e^x)^3} dx$$

Substitution $k + e^x = u$ $u'(x) = e^x$

$$\int \frac{e^x}{u^3} dx = \int \frac{1}{u^3} du = \frac{1}{-3+1} \cdot \frac{1}{u^2} + C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(k + e^x)^2} + C$$

Stammfunktion: $H(x, k) := -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(k + e^x)^2}$

$$J(k) := H(1, k) - H(0, k) \quad J(k) = \frac{1}{2 \cdot (k + 1)^2} - \frac{1}{2 \cdot (k + e)^2}$$

Teilaufgabe 3.0

Zum Zeitpunkt $t = 0$ besitzen die 80 Millionen Einwohner eines Staates 10 Millionen Handys. Die Anzahl der Handys, die in diesem Staat in Privatbesitz sind, wird durch den Funktionsterm $f(t)$ beschrieben, wobei t in Jahren gemessen wird.

Teilaufgabe 3.1 (7 BE)

Nach einem vereinfachten Modell gilt für die Anzahl der Handys in Privatbesitz in diesem Staat zum Zeitpunkt t , für $t \geq 0$, die Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt} f(t) = 0.2 \cdot (60 \cdot 10^6 - f(t)), \text{ wobei } \frac{d}{dt} f(t) = f'(t) \text{ die Ableitung von } f(t) \text{ nach der Zeit ist.}$$

Leiten Sie aus dieser Differentialgleichung den Funktionsterm $f(t)$ her.

$$\frac{d}{dt} f(t) = 0.2 \cdot (60 \cdot 10^6 - f(t))$$

Trennen der Variablen: $\frac{1}{(60 \cdot 10^6 - f)} \cdot df = 0.2 \cdot dt$

Integration: $\int \frac{1}{(60 \cdot 10^6 - f)} df = \int 0.2 dt$

$$\Rightarrow -\ln(|60 \cdot 10^6 - f|) = 0.2 \cdot t + C$$

$$\Rightarrow \ln(|60 \cdot 10^6 - f|) = -(0.2 \cdot t) - C$$

$$\Rightarrow |60 \cdot 10^6 - f| = e^{-(0.2 \cdot t) - C}$$

$$\Rightarrow |60 \cdot 10^6 - f| = k \cdot e^{-(0.2 \cdot t)} \quad \text{mit } k = e^{-C}$$

Auflösen des Betrags: $60 \cdot 10^6 - f = k \cdot e^{-(0.2 \cdot t)} \Rightarrow f(t) = 60 \cdot 10^6 - k \cdot e^{-(0.2 \cdot t)}$

$-(60 \cdot 10^6 - f) = k \cdot e^{-(0.2 \cdot t)} \Rightarrow f(t) = 60 \cdot 10^6 + k \cdot e^{-(0.2 \cdot t)}$

Allgemeine Lösung: $f(t) = 60 \cdot 10^6 - D \cdot e^{-(0.2 \cdot t)}$ mit $D \in \mathbb{R}$

triviale Lösung für $D = 0$: $f(t) = 60 \cdot 10^6$

Anfangswert. $f(0) = 10 \cdot 10^6$

$$\Leftrightarrow 60 \cdot 10^6 - D \cdot e^{-0} = 10 \cdot 10^6 \Leftrightarrow D = 50 \cdot 10^6$$

Spezielle Lösung: $f(t) := 60 \cdot 10^6 - 50 \cdot 10^6 \cdot e^{-(0.2 \cdot t)}$

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Nun soll gelten $f(t) = 60 \cdot 10^6 - 50 \cdot 10^6 \cdot e^{-0.2 \cdot t}$.

Geben Sie an, welche konkrete Bedeutung die Zahl 60 Millionen in diesem Funktionsterm hat. Berechnen Sie den Zeitpunkt $t \geq 0$, an dem 60% der Einwohner dieses Staates ein Handy besitzen, wobei angenommen wird, dass jeder Einwohner höchstens ein Handy hat.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(60 \cdot 10^6 - 50 \cdot 10^6 \cdot e^{-\frac{2}{10} \cdot t} \right) \rightarrow 60000000$$

\Rightarrow Interpretation: Der Markt ist bei ca. 60 Millionen gesättigt.

$$60 \cdot 10^6 - 50 \cdot 10^6 \cdot e^{-0.2 \cdot t} = 0.6 \cdot 60 \cdot 10^6 \Leftrightarrow 54 \cdot 10^6 - 0.6 \cdot 60 \cdot 10^6 = 50 \cdot 10^6 \cdot e^{-0.2 \cdot t}$$

$$t_0 := \frac{24}{50} = e^{-0.2 \cdot t} \text{ auflösen, } t \rightarrow 3.6698458754010021949 \quad t_0 = 3.7$$

Nach etwa 3,7 Jahren haben 60% der Einwohner ein Handy.