Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2003
Mathematik 12 Technik - A II - Lösung

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a(x) = \dfrac{3 \cdot x + 9}{x^2 + 6 \cdot x + a}$ mit $a \in \mathbb{R}$ in der jeweils größtmöglichen Definitionsmenge $\mathbb{D}_{fa} \subset \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1.1 (8 BE)

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die größtmögliche Definitionsmenge $\mathbb{D}_{fa}$.
Bestimmen Sie gegebenenfalls die Art der Definitionslücken und die Nullstelle von f_a.

Kurvenschar: $f(x, a) := \dfrac{3 \cdot x + 9}{x^2 + 6 \cdot x + a}$

Nullstellen des Nenners: $x^2 + 6 \cdot x + a = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{9 - a} - 3 \\ -\sqrt{9 - a} - 3 \end{pmatrix}$

2 Lösungen, falls $9 - a > 0$ **auflösen**, $a \rightarrow a < 9$

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{ -3 - \sqrt{(9 - a)} \, ; \, -3 + \sqrt{9 - a} \}$

Definitionslücken sind
zwei Polstellen 1. Ordnung
(vertikale Asymptoten mit VZW)

1 Lösung, falls $9 - a = 0$ **auflösen**, $a \rightarrow 9$

$f(x, 9)$ **vereinfachen** $\rightarrow \dfrac{3}{x + 3}$

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{ -3 \}$

Definitionslücke ist
eine Polstelle 1. Ordnung
(vertikale Asymptote mit VZW)

keine Lösung, falls $9 - a < 0$ **auflösen**, $a \rightarrow 9 < a$

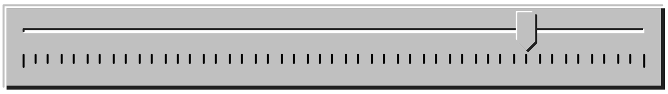
keine Definitionslücken

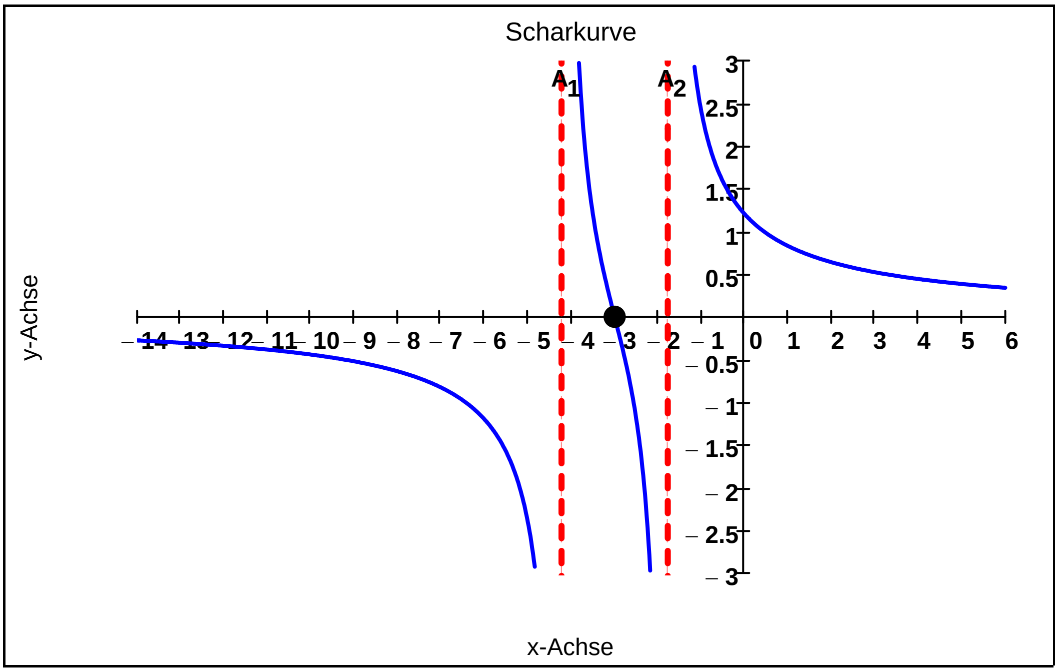
$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Nullstelle des Zählers: $3 \cdot x + 9 = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow -3$

NS(−3/0) falls $a \neq 9$

Wähle den Parameter:

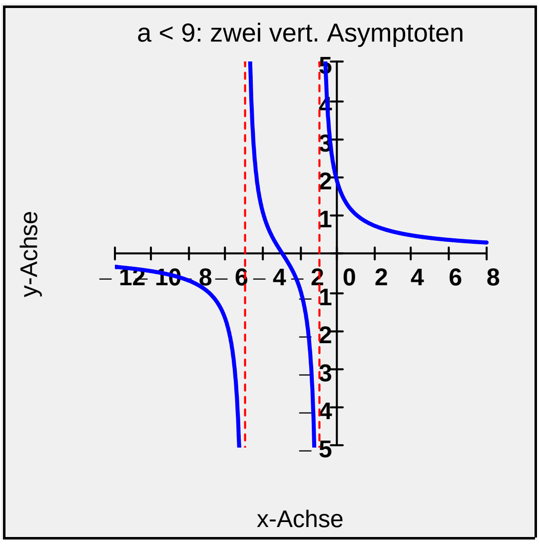


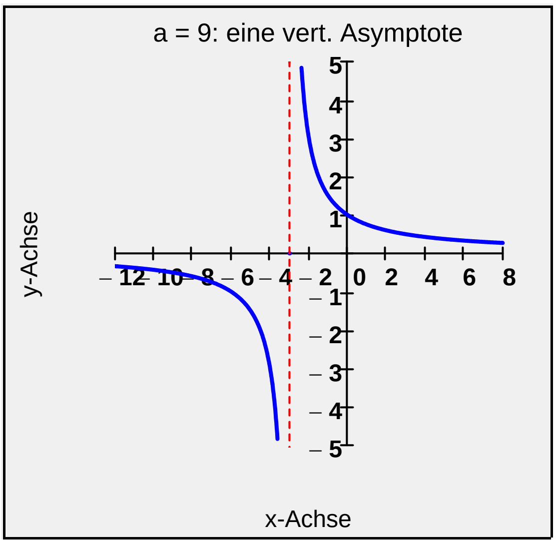


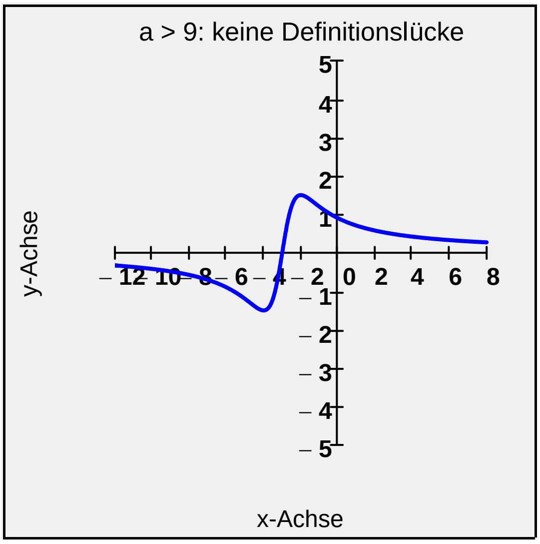
$a_0 = 7.5$ **Hor_Tangenten = "keine "**

Def_lücken = "Zwei Polstellen mit VZW"

$\textbf{Pol}_1 \rightarrow -\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} - 3$ $\textbf{Pol}_2 \rightarrow \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} - 3$







Teilaufgabe 1.2.0

Im Folgenden sei **a = 5** und $f_5(x) := \dfrac{3 \cdot x + 9}{x^2 + 6 \cdot x + 5}$ mit $ID_{f5} = IR \setminus \{-5; -1\}$.

Teilaufgabe 1.2 **(7 BE)**

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f_5 .

[Teilergebnis: $f_5{'}(x) = \dfrac{-3 \cdot x^2 - 18 \cdot x - 39}{\left(x^2 + 6 \cdot x + 5\right)^2}$]

$f_5(x) := f(x, 5)$

1. Ableitung: $f_{5x}(x) := \dfrac{d}{dx} f_5(x)$ **vereinfachen** $\rightarrow -\dfrac{3 \cdot \left(x^2 + 6 \cdot x + 13\right)}{\left(x^2 + 6 \cdot x + 5\right)^2}$

Nullstellen des Zählers: $x^2 + 6 \cdot x + 13 = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow \begin{pmatrix} -3 + 2i \\ -3 - 2i \end{pmatrix}$ d.h. keine Lösung

Zähler eine nach unten geöffnete Parabel ohne Nullstellen, immer negativ.
Nenner als Quadrat immer positiv, **Bruchterm immer negativ.**

	$x_1 \neq -5$		$x_2 \neq -1$	
Zähler:	negativ		negativ	negativ
Nenner:	positiv		positiv	positiv
f ' (x)	negativ		negativ	negativ
G_f	smf		smf	smf
		Pol	Pol	

G_f steng mon. fallend für $-\infty < x < -5 \vee -5 < x < -1 \vee -1 < x < \infty$

Teilaufgabe 1.3 **(3 BE)**
Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangente t des Graphen von f_5 im Punkt $P(1, y_P)$.

[Ergebnis: $t(x) = \frac{1}{12} \cdot (-5 \cdot x + 17)$]

Funktionswert: $f(1, 5) = 1$

Steigung der Tangente: $f_{5x}(1) = -\frac{5}{12}$

$$t(x) := f_{5x}(1) \cdot (x - 1) + 1 = \frac{17}{12} - \frac{5 \cdot x}{12}$$

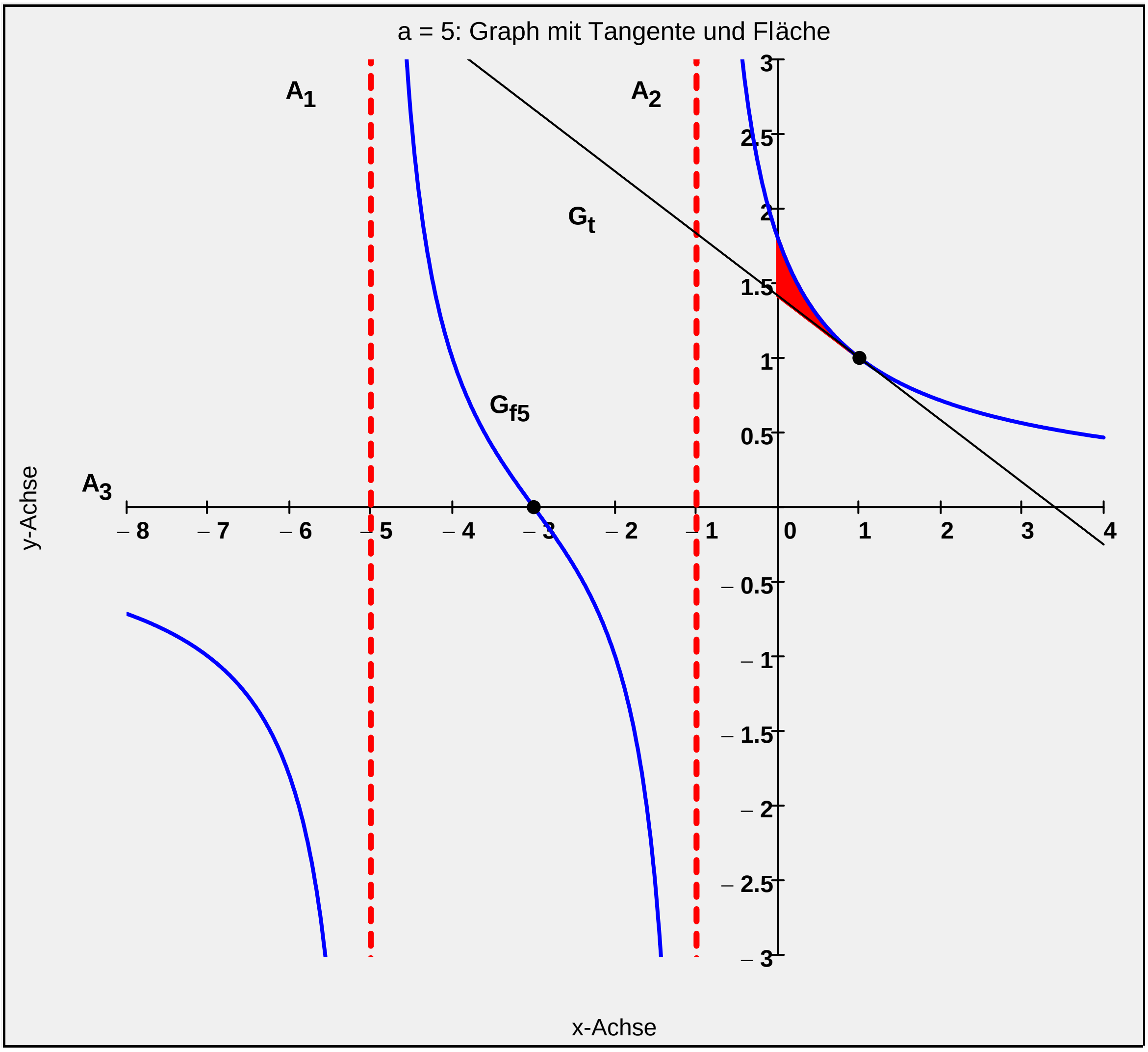
Teilaufgabe 1.4 **(10 BE)**
Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_5 an.

Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion f_5, seine Asymptoten und die Tangente aus Aufgabe 1.3 für $-7 \le x \le 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab: x - Achse: 1 LE entspricht 1 cm, y - Achse: 1 LE entspricht 2 cm,

A_1: $x_1 = -5$

A_2: $x_2 = -1$

A_3: $y_0 = 0$



Teilaufgabe 1.5 **(7 BE)**
Formulieren Sie auf der Grundlage Ihrer Zeichnung eine Vermutung über das Symmetrieverhalten des Graphen von f_5 und beweisen Sie Ihre Vermutung rechnerisch.

Vermutung zur Symmetrie: **Punktsymmetrie zur NS(-3/0)**

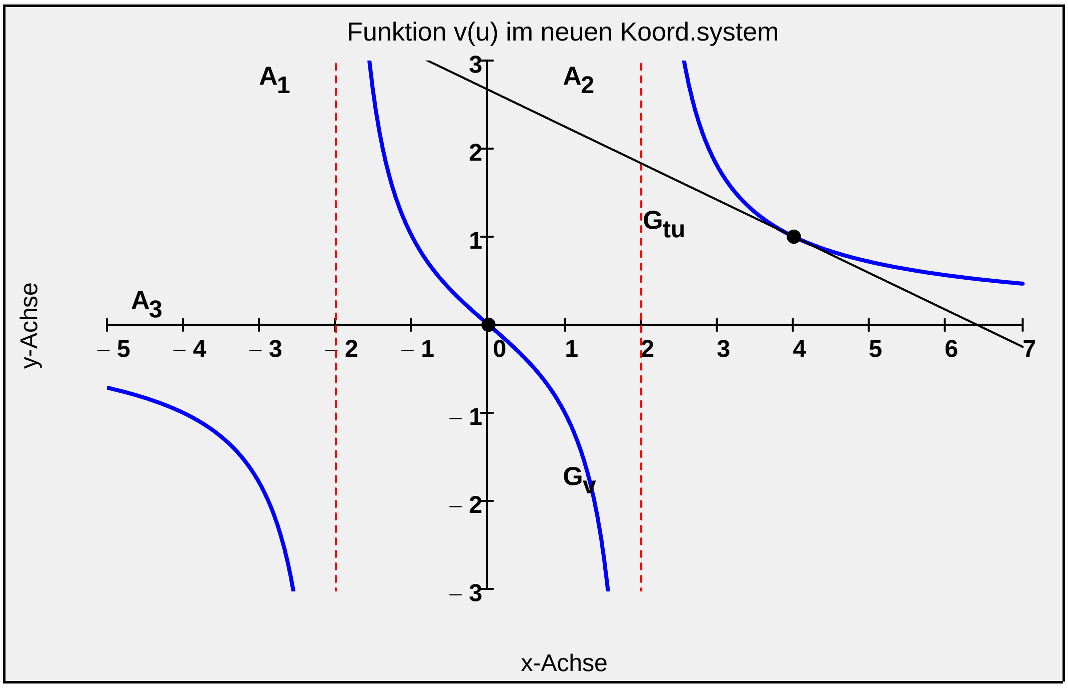
Koordinatentransformation: $\mathbf{x = u - 3}$ $\mathbf{y = v}$

$$f(u-3,5) \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{3\cdot u}{u^2-4}$$

Funktionsterm im neuen Koordinatensystem: $v(u) := 3\cdot\frac{u}{\left(u^2-4\right)}$

Symmetriebeweis: zu zeigen: $v(-u) = -v(u)$ ist äquivalent zu $v(-u) + v(u) = 0$

$v(-u) + v(u) \rightarrow 0$ q. e. d.



Teilaufgabe 1.6.0

Gegeben ist zusätzlich die Funktionsvorschrift $g(x) = \frac{3}{2} \cdot \ln\left(x^2 + 6 \cdot x + 5\right)$

Teilaufgabe 1.6.1 (4 BE)

Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge $ID_g \subset IR$.

Logarithmusfunktion: $g(x) := \frac{3}{2} \cdot \ln\left(x^2 + 6 \cdot x + 5\right)$

Definitionsmenge: $x^2 + 6 \cdot x + 5 > 0$ **auflösen**, $x \rightarrow -1 < x \vee x < -5$

$$ID_g = \{ x \mid x < -5 \vee x > -1 \} = IR \setminus [-5 ; -1]$$

Teilaufgabe 1.6.2 (4 BE)

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $g(x)$ für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -1$.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) \rightarrow -\infty$ $\quad$ $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \rightarrow \infty$ $\quad$ VZW in $] -1 ; \infty [$

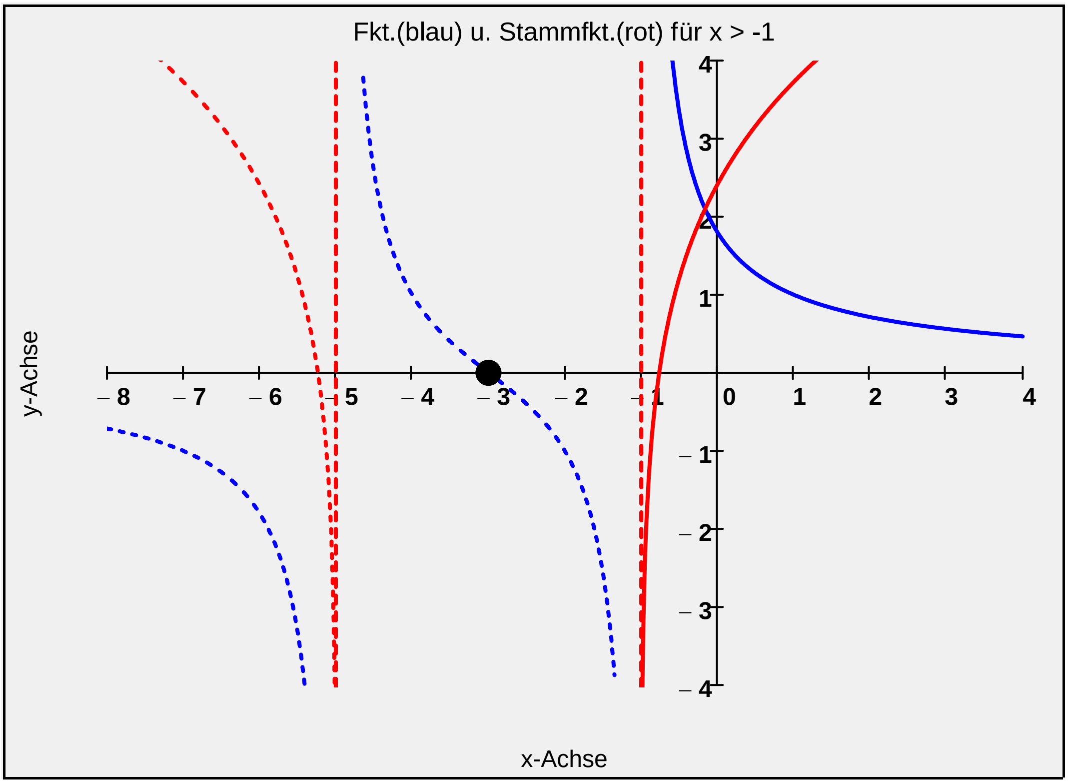
$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \rightarrow \infty$ $\quad$ $\lim_{x \rightarrow -5^-} g(x) \rightarrow -\infty$ $\quad$ VZW in $] -\infty ; -5 [$

Da Logarithmusfunktionen **stetig** sind, folgt nach dem Nullstellensatz die **Existenz mindestens einer Nullstelle** im Intervall $] -1 ; \infty [$ bzw. $] -\infty ; -5 [$.

Teilaufgabe 1.6.3 (3 BE)
Zeigen Sie, dass für $x > -1$ die Funktion **g** eine Stammfunktion von f_5 ist.

zu zeigen: $g'(x) = f_5(x)$

$$g_x(x) := \frac{d}{dx}g(x) \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{3}{2\cdot(x+1)} + \frac{3}{2\cdot(x+5)}$$



Teilaufgabe 1.7 (5 BE)
Die Gerade t aus Aufgabe 1.3 und der Graph von f_5 schließen im I. Quadranten mit der y-Achse ein Flächenstück ein.
Berechnen Sie dessen Inhalt auf drei Nachkommastellen genau.

$$A := \int_0^1 (f(x,5) - t(x))\,dx \rightarrow \frac{3\cdot\ln(3)}{2} - \frac{3\cdot\ln(5)}{2} + \ln(8) - \frac{29}{24}$$

$A = 0.105$ FE

Teilaufgabe 2.0
Die Geschwindigkeit v eines in einer bestimmten Flüssigkeit unter Reibungseinfluss fallenden Körpers kann mathematisch idealisiert und ohne Verwendung von Einheiten in Abhängigkeit von der Zeit t durch den folgenden Funktionsterm dargestellt werden:

$v(t) := 15 \cdot \left(1 - e^{-0.654 \cdot t}\right)$ für $t \geq 0$

Grundlage für die folgenden Teilaufgaben sind die bekannten physikalischen Zusammenhänge, dass die Geschwindigkeitsfunktion die Ableitungsfunktion der Ortsfunktion und die Beschleunigungsfunktion die Ableitungsfunktion der Geschwindigkeitsfunktion ist.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)
Berechnen Sie $v(0)$ und $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$ und interpretieren Sie die Ergebnisse in dem gegebenen Zusammenhang.

Grenzwerte:

$v(0) \rightarrow 0$ — Körper ruht zum Zeitpunkt t = 0

$\lim\limits_{t \to \infty} v(t) \rightarrow 15.0$ — Geschwindigkeit nähert sich der Maximalgeschwindigkeit $v_0 = 15$ asymptotisch an.

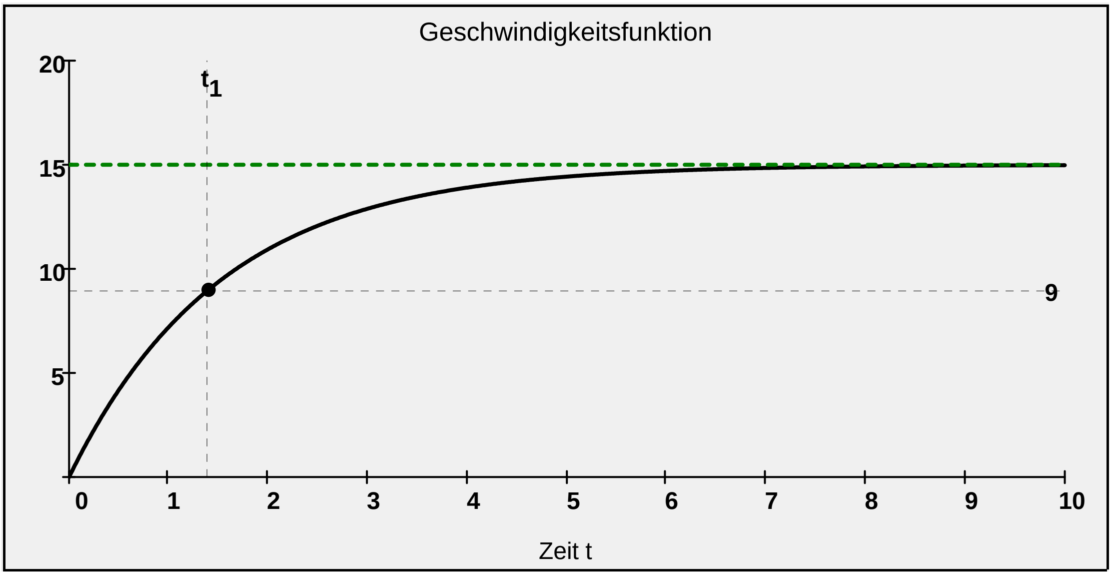
Teilaufgabe 2.2 (3 BE)
Berechnen Sie den Zeitpunkt t_1, an dem gilt: $v(t_1) = 9.0$.

[Ergebnis: $t_1 \approx 1.4$]

Spezieller Zeitpunkt:

$15 \cdot \left(1 - e^{-0.654 \cdot t_1}\right) = 9$ | auflösen , t_1 ; Gleitkommazahl , 5 $\rightarrow 1.4011$

$t_1 := 1.4$

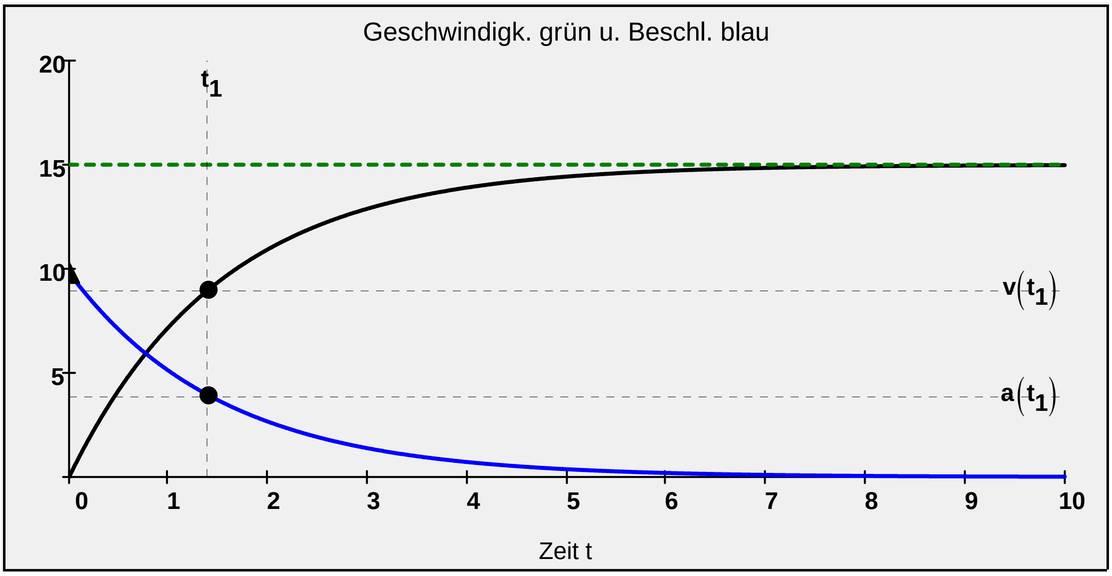


Teilaufgabe 2.3 (4 BE)

Berechnen Sie für $t = 0$ und für $t = t_1$ ohne Benennungen die Werte der Beschleunigung, die der Körper momentan erfährt.

Beschleunigung: $a(t) := \frac{d}{dt}v(t)$ also: $a(t) := 9.81 \cdot e^{-0.654 \cdot t}$

$a(0) = 9.81$ $a(t_1) = 3.9267$



Teilaufgabe 2.4 (4 BE)
Benennen Sie die im Zeitintervall **[0 ; t_1]** durchfallende Strecke.

Durchfallene Strecke:

$$s(t) := \int v(t)\,dt = 15.0 \cdot t + 22.936 \cdot e^{-0.654 \cdot t}$$

$$s(t_1) := \int_0^{t_1} v(t)\,dt \qquad\qquad s(t_1) = 7.245$$