Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2003
Mathematik 12 Technik Nachtermin - Analysis - Lösung

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) := \dfrac{4-x}{\ln(4-x)}$ in der Definitionsmenge

$D_f = \{\, x \mid x < 4 \wedge x \neq 3 \,\}$.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to -\infty$, $x \to 3$ und $x \to 4$.

An den Grenzen:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4-x}{\ln(4-x)} \to \infty \qquad \lim_{x \to 4^-} \frac{4-x}{\ln(4-x)} \to 0$$

An der Definitionslücke

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{4-x}{\ln(4-x)} \to \infty$$

vertikale Asymptote mit VZW

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{4-x}{\ln(4-x)} \to -\infty$$

Teilaufgabe 1.2 (7 BE)

Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion f und untersuchen Sie deren Verhalten für $x \to 4$.

[Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{1-\ln(4-x)}{(\ln(4-x))^2}$]

$$f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) = -\frac{\ln(4-x)-1}{\ln(4-x)^2}$$

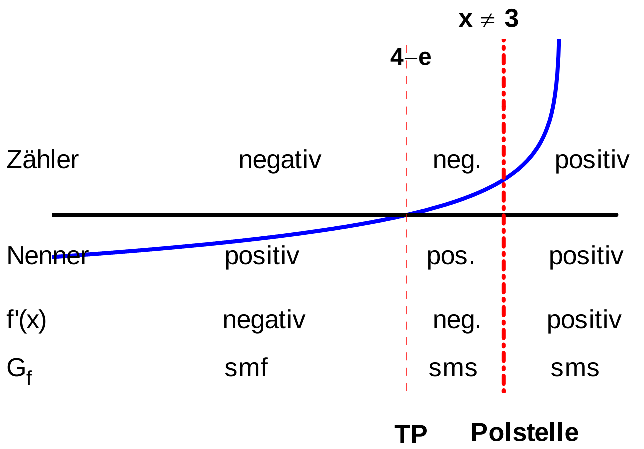
$$\lim_{x \to 4^-} \left[\frac{\overset{\overset{-\infty}{\uparrow}}{-(\ln(4-x)-1)}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{\ln(4-x)^2}} \right] \overset{\text{I. H.}}{=} \lim_{x \to 4^-} \left[\frac{\frac{1}{4-x}}{\underset{\underset{-\infty}{\downarrow}}{2 \cdot \ln(4-x)} \cdot \frac{1}{4-x} \cdot (-1)} \right] = 0$$

d.h. horizontale Tangente

Teilaufgabe 1.3 (6 BE)
Ermitteln Sie das Monotonieverhalten sowie die Koordinaten und die Art des relativen Extremalpunktes des Graphen der Funktion f.

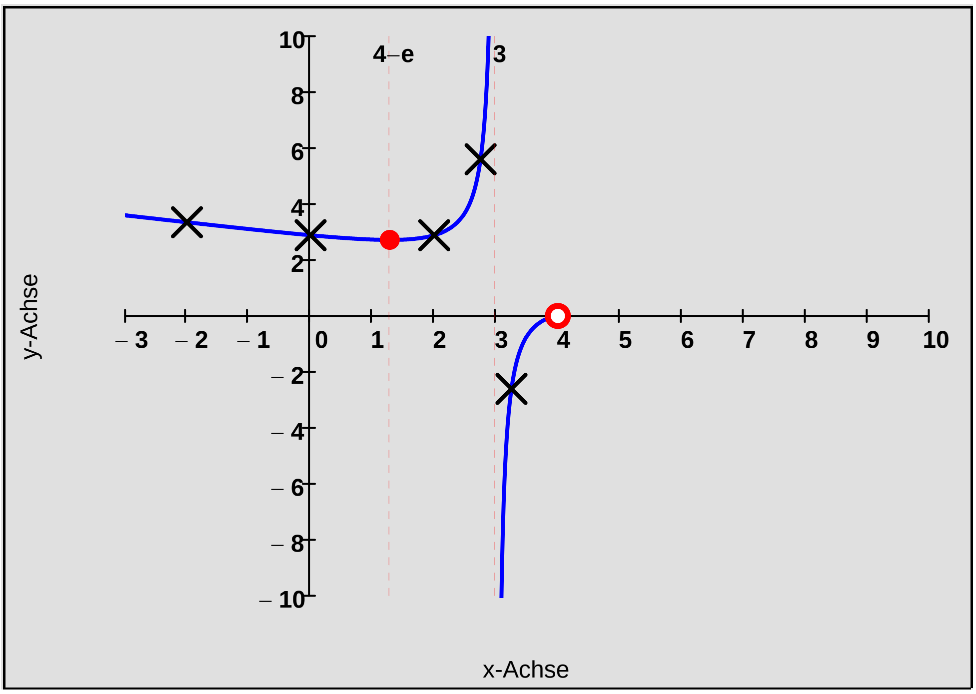
$$f(x) = -\frac{x-4}{\ln(4-x)} \qquad f'(x) = -\frac{\ln(4-x)-1}{\ln(4-x)^2} \qquad z(x) := 1 - \ln(4-x)$$

Nullstelle des Zählers der Ableitung: $-\ln(4-x) + 1 = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow 4 - e$



$f(4-e) = e$ **Tiefpunkt** $TP(4-e, e)$

$$\textbf{Wertetabelle} = \begin{pmatrix} -2.00 & 0.00 & 2.00 & 2.75 & 3.25 \\ 3.35 & 2.89 & 2.89 & 5.60 & -2.61 \end{pmatrix}$$



Teilaufgabe 2.0
Gegeben ist die abschnittsweise definierte reelle Funktionenschar

$$g_a(x) = \begin{cases} \dfrac{4-x}{\ln(4-x)} & \text{if } x < 4 \wedge x \neq 3 \\[2ex] \dfrac{x^2 - 8\cdot x + a^2}{x} & \text{if } x \geq 4 \end{cases} \qquad \text{mit } a \in IR.$$

Für die folgenden Teilaufgaben sollen die in den Teilaufgaben 1.1 und 1.2 gewonnenen Erkenntnisse über die Funktion **f** verwendet werden.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)
Bestimmen Sie a so, dass die zugehörige Funktion g_a an der Stelle $x_0 = 4$ stetig ist.

Teilfunktion: $g_2(x,a) := \dfrac{x^2 - 8\cdot x + a^2}{x}$

rechter Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x^2 - 8\cdot x + a^2}{x} \to \dfrac{a^2}{4} - 4$

linker Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) \to 0$

$\Rightarrow$ Stetig: $-4 + \dfrac{1}{4}\cdot a^2 = 0$ auflösen, $a \to \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

Setzen Sie für die folgenden Teilaufgaben $a = 4$.

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)
Zeigen Sie, dass die zugehörige Funktion g_4 an der Stelle $x_0 = 4$ differenzierbar ist.

Ableitung der rechten Teilfunktion

$$g'_2(x) := \frac{d}{dx}g_2(x,4) = 1 - \frac{16}{x^2}$$

rechter Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x^2 - 16}{x^2} \to 0$

$\Rightarrow$ beidseitig eine horizontale Tangente

linker Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 4^-} f'(x) \to 0$

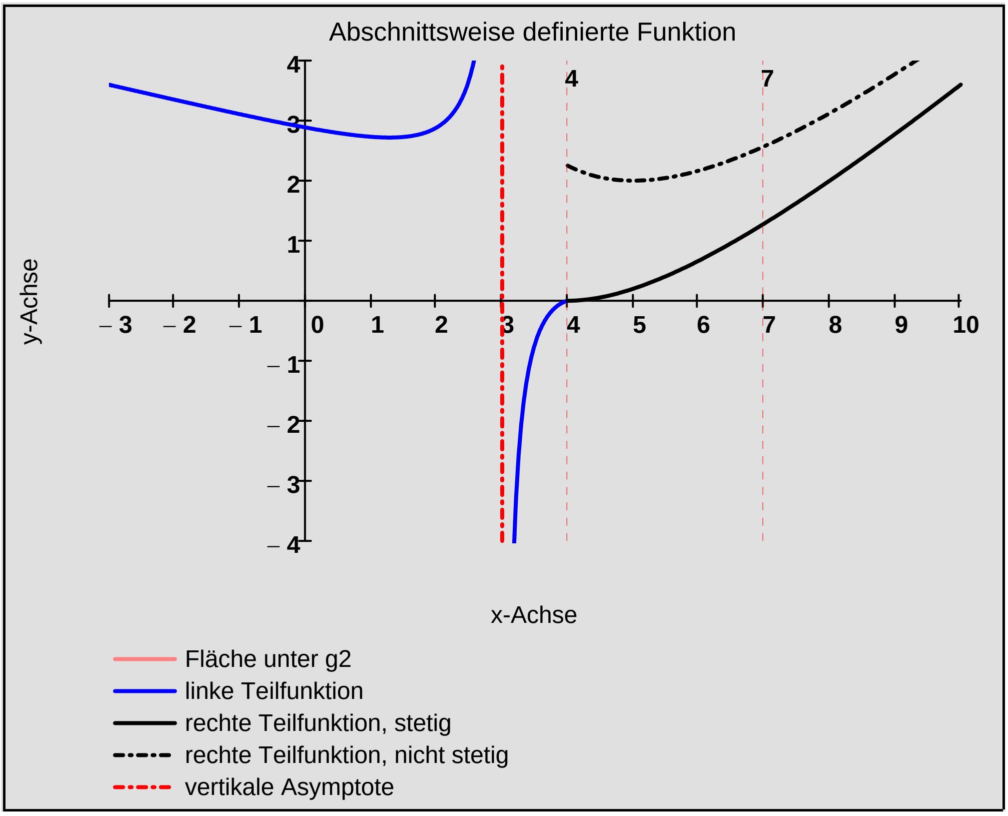
G_g ist differenzierbar an $x_0 = 4$

Teilaufgabe 2.3 (2 BE)
Geben Sie die Gleichungen der Tangente und der Normale des Graphen der Funktion g_4 an der Stelle $x_0 = 4$ an.

Tangente: $y = 0$ Normale: $x = 4$

Teilaufgabe 2.4 (3 BE)
Erweitern Sie die graphische Darstellung der Funktion f aus 1.4 zu einer graphischen Darstellung der Funktion g_4 unter Verwendung bisheriger Ergebnisse für $4 \le x \le 7$.

Stetig für $a := 4$ Nicht stetig für $a \ne 4 \wedge a \ne -4$ $a_2 := 5$



Teilaufgabe 2.5 (7 BE)
Die x-Achse, die Gerade mit der Gleichung $x = 7$ und der Graph der Funktion g_4 schließen im ersten Quadranten ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der graphischen Darstellung und berechnen Sie seinen Flächeninhalt auf zwei Nachkommastellen gerundet.

$$g_2(x,4) = \frac{x^2 - 8 \cdot x + 16}{x} = x + \frac{16}{x} - 8$$

Stammfunktion: $G(x) := \int x - 8 + \frac{16}{x}\, dx = 16 \cdot \ln(x) - 8 \cdot x + \frac{x^2}{2}$

Fläche: $A := \int_4^7 \left(x - 8 + \frac{16}{x}\right) dx$ $\quad A = 16 \cdot \ln(7) - 16 \cdot \ln(4) - \frac{15}{2} = 1.454$

Teilaufgabe 3.0
Beim Einschalten eines Gleichstromkreises, in dem eine Spule mit der Induktivität L und ein ohmscher Widerstand R in Reihe geschaltet sind, lässt sich der zeitliche Verlauf der Stromstärke ohne Verwendung von Einheiten für die Zei $t \geq 0$ wie folgt beschreiben:

$$J(t) = 6.0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{und} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)
Berechnen Sie in Abhängigkeit der genannten Größen den Zeitpunkt t_1, an dem die Stromstärke die Hälfte von $J_{max} = 6.0$ erreicht.

[Ergebnis: $t_1 = \frac{L \cdot \ln(2)}{R}$]

$$1 - e^{\frac{-R}{L} \cdot t} = \frac{1}{2} \text{ auflösen}, t \rightarrow \frac{L \cdot \ln(2)}{R} \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

$$\ln(2) \cdot \frac{L}{R} = \frac{22}{10} \qquad \tau := \frac{22}{\ln(2) \cdot 10} \qquad \tau = 3.174$$

Teilaufgabe 3.2 (6 BE)
Der Zeitpunkt t_1 wird gemessen un man erhält $t_1 = 2.2$.
Berechnen Sie den Zeitpunkt t_2 , an dem die Stromstärke 80% von $J_{max} = 6.0$ beträgt.

$$t_2 := \frac{8}{10} \cdot 6 = 6 \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \text{ auflösen}, t \rightarrow \frac{11 \cdot \ln(5)}{5 \cdot \ln(2)} \qquad t_2 = 5.108$$

Teilaufgabe 3.3 (5 BE)
Der rechtsseitige Grenzwert der Ableitung $\frac{d}{dt}J(t)$ für $t \rightarrow 0$ wird als Steigung des Graphen der Funktion $J(t)$ an der Stelle $t = 0$ definiert.
Berechnen Sie den zugehörigen Steigungswinkel.

Stromverlauf: $J(t,\tau) := 6 \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$

Ableitung: $J'(t,\tau) := \frac{d}{dt}J(t,\tau) = \frac{6 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}$

Steigung: $\tan(\alpha) := J'(0,\tau) = \frac{30 \cdot \ln(2)}{11}$

Winkel: $\alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{30}{11} \cdot \ln(2)\right) \qquad \alpha = 62.122 \cdot \text{Grad}$

Teilaufgabe 3.4 (5 BE)
Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse für $0 \le t \le 10$ den Graph der Funktion $J(t)$ und dessen Asymptoten.