Beliebige Symmetrie

made with mathcad

Theorie

Gegeben ist ein Funktionsterm f(x) einer Funktion f, deren Graph achsensymmetrisch bzgl. einer senkrechten Geraden $\mathbf{x = x_S}$ oder punktsymmettrisch zu einem beliebigen Punkt $\mathbf{P(x_S/y_S)}$ ist.

Es wird eine **Koordinatentransformation** des Funktionsterms $\mathbf{y = f(x)}$ im Koordinatensystem $\mathbf{(x\ ;\ y)}$ in das Koordinatensystems $\mathbf{(u\ ;\ v)}$ mit dem Funktionsterm $\mathbf{v = f\_(u)}$ durchgeführt, sodass der Graph von **f_** im neuen Koordinatensystem achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse oder punktsymmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs ist.

Allgemeine Transformationsgleichungen: $\mathbf{x = u + x_S}$; $\mathbf{y = v + y_S}$

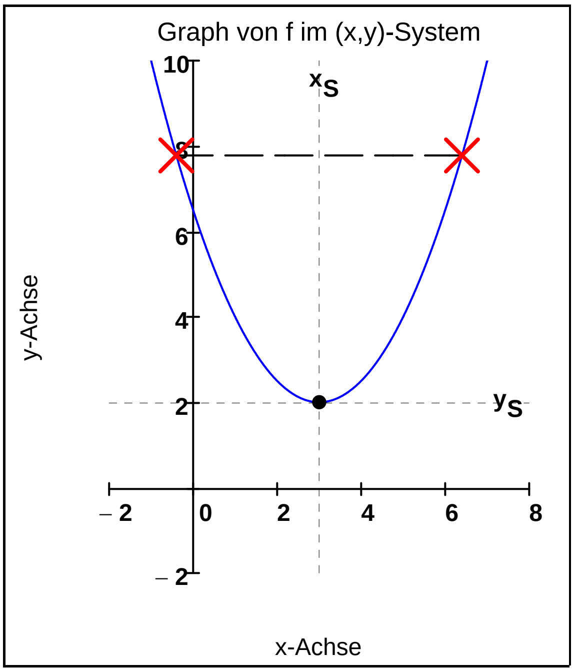
Aufgabe 1: Symmetrie zu einer senkrechten Geraden (Parallele zur y-Achse)

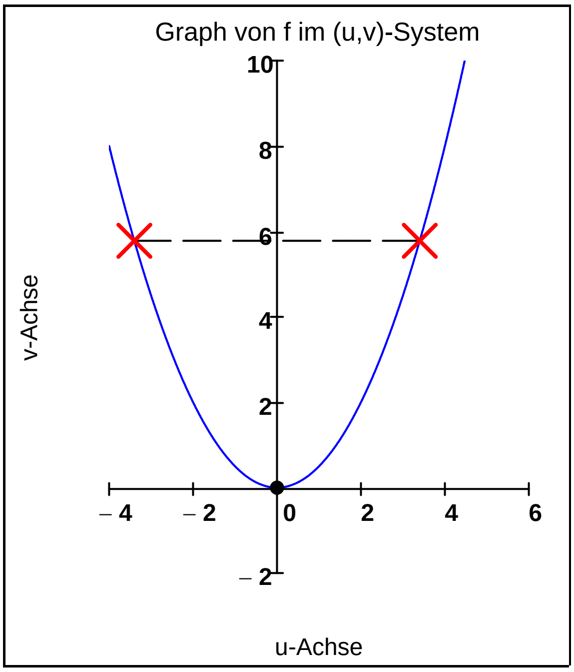
Gegeben ist die Funktion f mit $\mathbf{f(x) := \frac{1}{2}\cdot\left(x^2 - 6\cdot x + 13\right)}$ mit $\mathbf{x \in IR}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels $S(x_S / y_S)$.

b) Zeigen Sie mithilfe einer geeigneten Koordinatentransformation, dass der Graph von f symmetrisch zur Geraden $\mathbf{x = x_S}$ ist.

Wahl von x_0:





Funktionsterm: $f(x) = \frac{x^2}{2} - 3\cdot x + \frac{13}{2}$

Koordinatentransformation: $x = u + 3$ $y = v + 2$

$v + 2 = f(u+3) \rightarrow v + 2 = \frac{(u+3)^2}{2} - 3\cdot u - \frac{5}{2}$ erweitern $\rightarrow v + 2 = \frac{u^2}{2} + 2$ auflösen, $v \rightarrow \frac{u^2}{2}$

Funktionsterm im neuen Koordinatensystem (u,v): $f\_(u) := \frac{u^2}{2}$

Symmetriebeweis: $f\_(-u) = \frac{u^2}{2}$ $f\_(-u) - f\_(u) \rightarrow 0$

$\Rightarrow$ **Achsensymmetrie von $G_{f\_}$ bzgl. der y-Achse**
Achsensymmetrie von G_f bzgl. der Geraden $x = x_S$

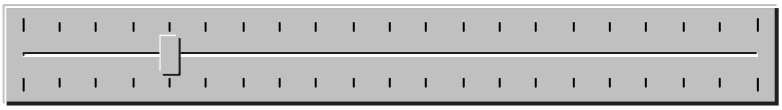
Aufgabe 2: Symmetrie zu einem beliebigen Punkt

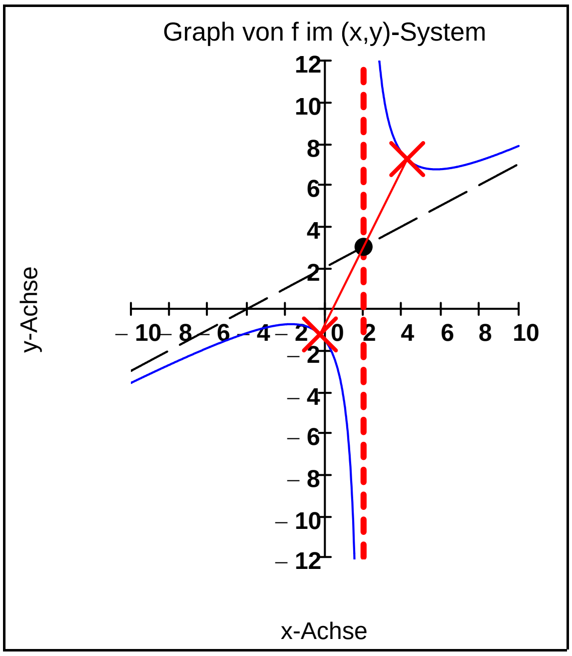
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) := \dfrac{x^2 + 2 \cdot x + 6}{2 \cdot x - 4}$ mit $x \in IR$.

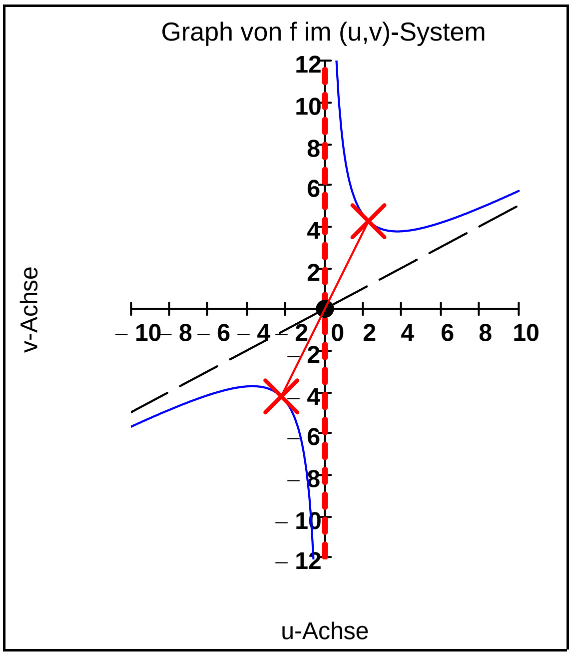
a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt $S(x_S\,/\,y_S)$ der beiden Asymptoten.

b) Zeigen Sie mithilfe einer geeigneten Koordinatentransformation, dass der Graph von f symmetrisch zum Punkt S ist.

Wahl von x_0:







Polynomdivision: $\dfrac{x^2 + 2 \cdot x + 6}{2 \cdot x - 4} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{7}{x - 2} + 2$

Schiefe Asymptote: $g(x) := \dfrac{1}{2} \cdot x + 2$ $\qquad g(2) = 3$

Vertikale Asymptote. $x_0 := 2$ $\qquad y_0 := g(2) = 3$

Symmetriepunkt: $S := \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix}$ $\qquad S \rightarrow (2 \;\; 3)$

Koordinatentransformation: $x = u + 2$ $\qquad y = v + 3$

Neuer Funktionsterm von f:

$$v + 3 = f(u + 2) \rightarrow v + 3 = \frac{2 \cdot u + (u + 2)^2 + 10}{2 \cdot u} \text{ auflösen}, v \;\rightarrow \frac{u^2 + 14}{2 \cdot u} \qquad f\_(u) := \frac{u^2 + 14}{2 \cdot u}$$

Neuer Funktionsterm von g:

$$v + 3 = g(u + 2) \rightarrow v + 3 = \frac{u}{2} + 3 \text{ auflösen}, v \;\rightarrow \frac{u}{2} \qquad g\_(u) := \frac{u}{2}$$

Symmetriebeweis:

$$f\_(-u) = -\frac{u^2 + 14}{2 \cdot u} \qquad f\_(-u) + f\_(u) \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ **Punktsymmetrie von $G_{f\_}$ bzgl. Punkt O(0/0)**

Punktsymmetrie von G_f bzgl. Punkt $S(x_S/y_S)$