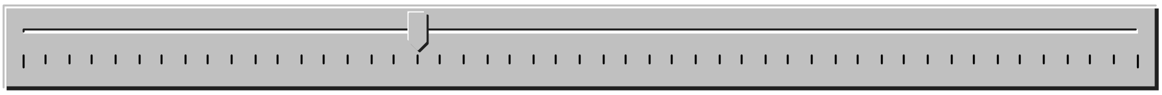
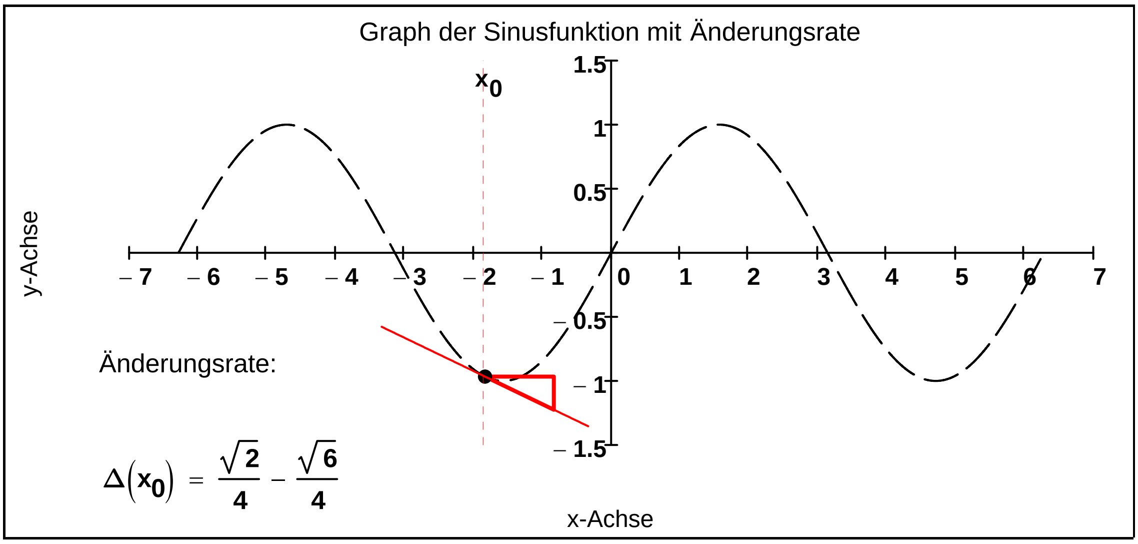
Differentialrechung

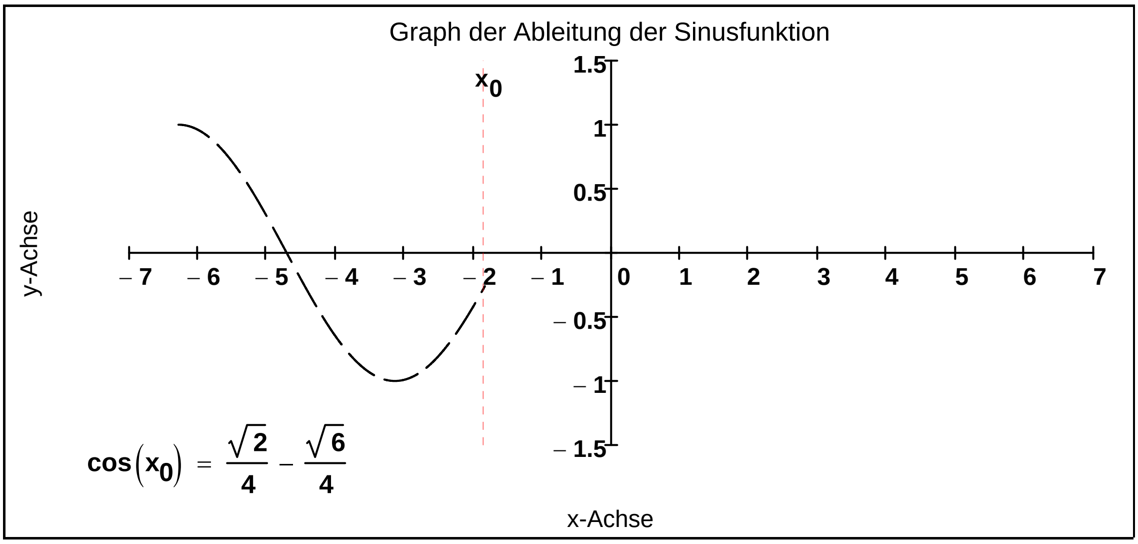
Ableitungen der Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion

Aufgabe 1a

Gegeben ist die Funktion $f(x) := \sin(x)$ mit $x \in \mathrm{IR}$. Gesucht ist die Ableitungsfunktion.
Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion graphisch mithilfe der Änderungsrate.





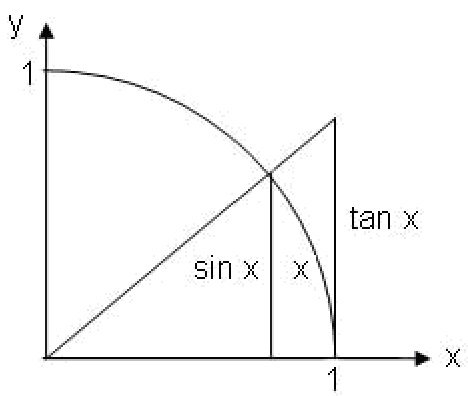


Aufgabe 1b

Gegeben ist die Funktion $f(x) := \sin(x)$ mit $x \in IR$. Gesucht ist die Ableitungsfunktion.
Bestimmen Sie die Ableitung mithilfe des Differentialquotienten.

Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

Betrachtung im 1. Quadranten des Einheitskreises: $x \in \left] 0 ; \frac{\pi}{2} \right[$



Abschätzung für das Bogenmaß:

$\sin(x) < x < \tan(x)$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\sin(x)}{\sin(x)} < \dfrac{x}{\sin(x)} < \dfrac{\tan(x)}{\sin(x)}$

$\Leftrightarrow \quad 1 < \dfrac{x}{\sin(x)} < \dfrac{1}{\cos(x)}$

linke Seite: $1 < \dfrac{x}{\sin(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\sin(x)}{x} < 1$

rechte Seite: $\dfrac{x}{\sin(x)} < \dfrac{1}{\cos(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) < \dfrac{\sin(x)}{x}$

Zusammenfassung: $\cos(x) < \dfrac{\sin(x)}{x} < 1$

Grenzwertbetrachtung: $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) < \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} < 1$

$\Leftrightarrow \quad 1 < \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} < 1$

$\Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} \to 1$

Der Differentialquotient $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$ **:**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} \right)$$

Mit dem Additionstheorem: $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{2}{\Delta x} \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot x + \Delta x}{2} \right) \right)$$

Trennung der Grenzwerte:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

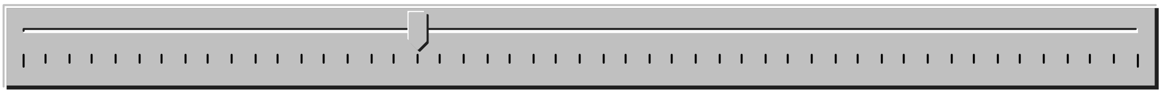
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

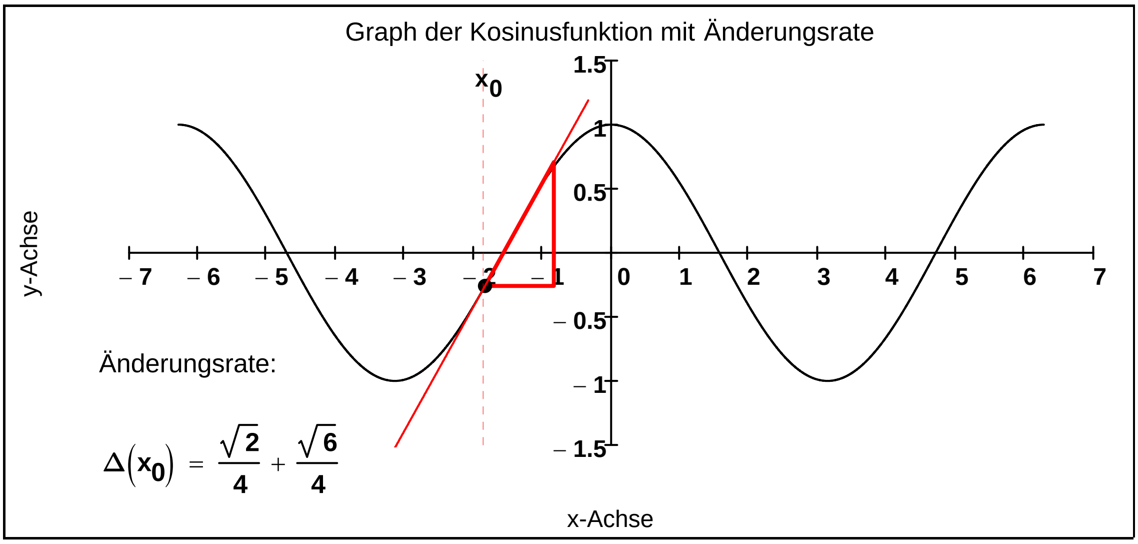
$$1 \qquad\qquad\qquad \cos(x)$$

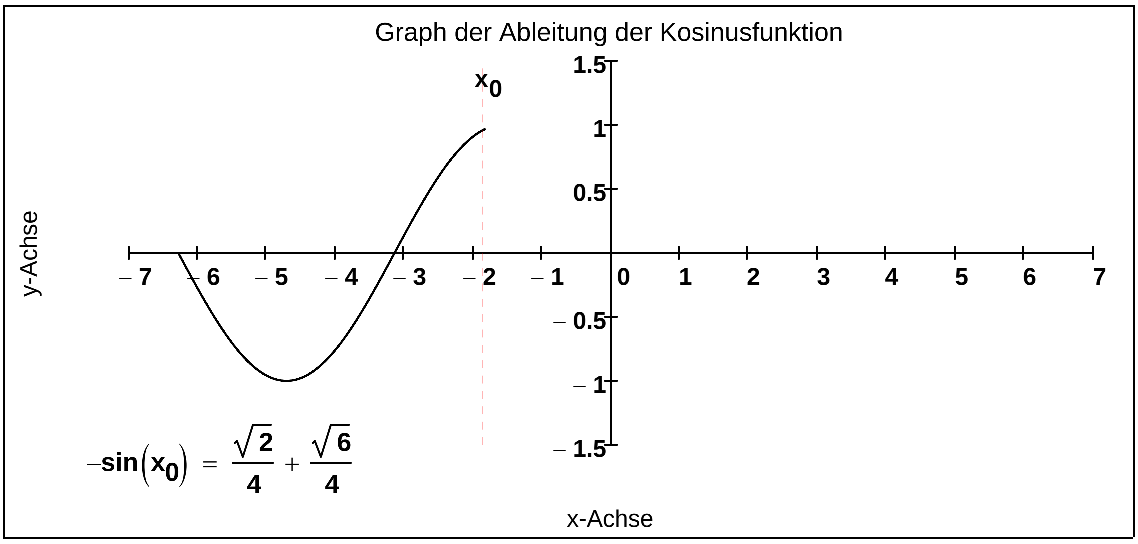
Also gilt: $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$

Aufgabe 2a

Gegeben ist die Funktion $f(x) := \cos(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$. Gesucht ist die Ableitungsfunktion.
Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion graphisch mithilfe der Änderungsrate.







Aufgabe 2b

Gegeben ist die Funktion $f(x) := \cos(x)$ mit $x \in IR$. Gesucht ist die Ableitungsfunktion.
Bestimmen Sie die Ableitung mithilfe des Differentialquotienten.

Der Differentialquotient $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$ **:**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\cos(x+\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} \right)$$

Mit dem Additionstheorem: $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{-2}{\Delta x} \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot x + \Delta x}{2}\right) \right)$$

Trennung der Grenzwerte:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$-1 \qquad\qquad\qquad \sin(x)$$

Also gilt: $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$

Aufgabe 3

Gegeben sind die Funktionen $\sin(x)$ bzw. $\cos(x)$ mit $x \in IR$.
a) Stellen Sie die Sinusfunktion als Reihe dar.
b) Stellen Sie die Kosinusfunktion als Reihe dar.
c) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktionen.

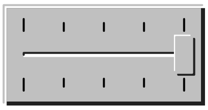
Teilaufgabe a)

Funktionsterm: $f(x) := \sin(x)$

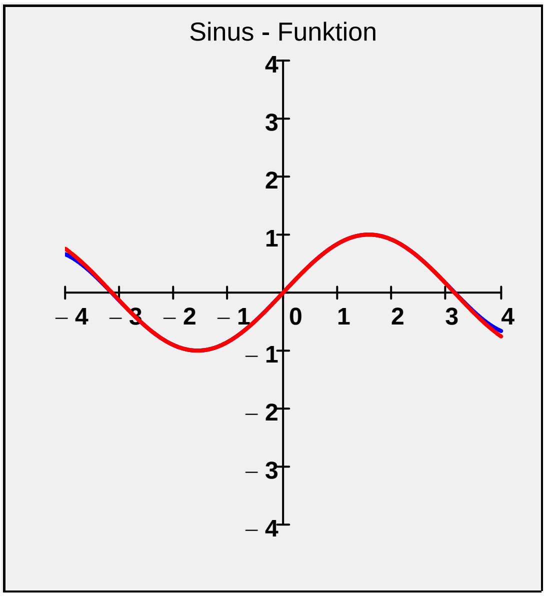
Summenterm: $\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$ für $x \in \left]-\infty ; \infty\right[$

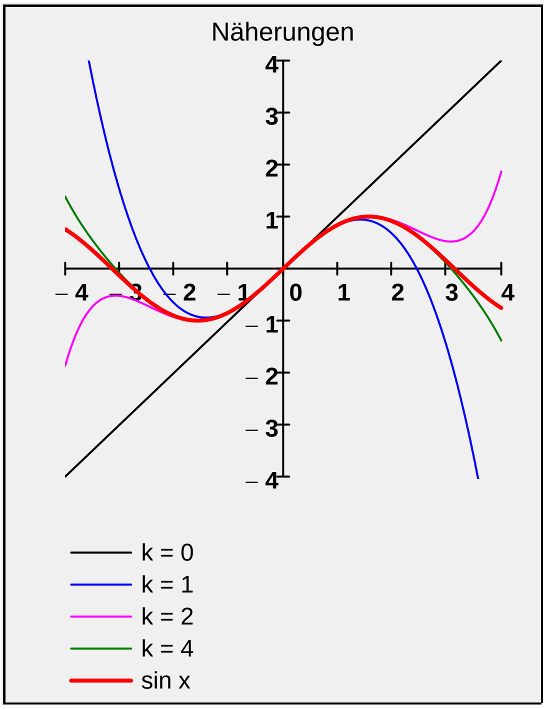
Summenschreibweise: $\sin(x) = \sum_k \left[(-1)^k \cdot \frac{x^{2\cdot k+1}}{(2\cdot k+1)!}\right]$

Wählen Sie die Näherung der einzelnen Funktionsterme:



Reihe





Teilaufgabe b)

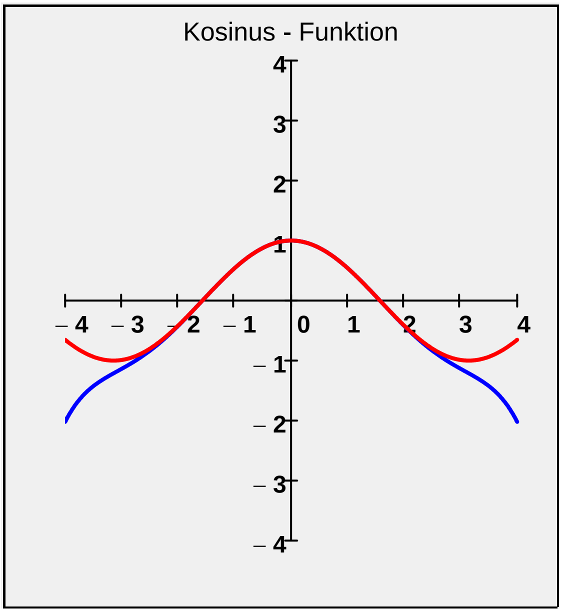
Funktionsterm: $f(x) := \cos(x)$

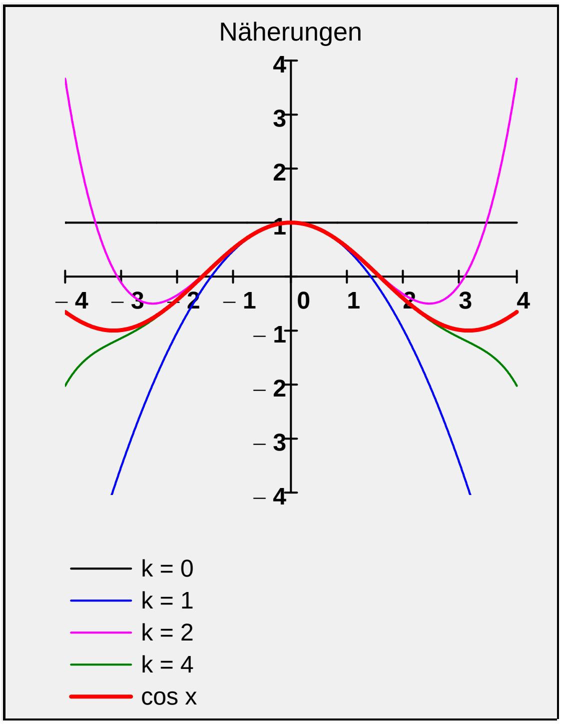
Summenterm: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots$ für $x \in \left] -\infty ; \infty \right[$

Summenschreibweise: $\cos(x) = \sum_{k} \left[(-1)^k \cdot \frac{x^{2 \cdot k}}{(2 \cdot k)!} \right]$

Wählen Sie die Näherung der einzelnen Funktionsterme:

Reihe





Teilaufgabe c)

Summenterm: $\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$ für $x \in \left] -\infty ; \infty \right[$

Die Ableitung: $\frac{d}{dx}(\sin(x)) = 1 - \frac{3 \cdot x^2}{3!} + \frac{5 \cdot x^4}{5!} - \frac{7 \cdot x^6}{7!} + \frac{9 \cdot x^8}{9!} - \frac{11 \cdot x^{10}}{11!} + \ldots$

Mit $\frac{n}{n!} = \frac{n}{n \cdot (n-1)!}$ gilt: $\frac{d}{dx}(\sin(x)) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots$

Das ist die Reihe für Kosinus.

Summenterm: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots$ für $x \in \left] -\infty ; \infty \right[$

Die Ableitung: $\frac{d}{dx}(\cos(x)) = 0 - \frac{2 \cdot x}{2!} + \frac{4 \cdot x^3}{4!} - \frac{6 \cdot x^5}{6!} + \frac{8 \cdot x^7}{8!} - \frac{10 \cdot x^9}{10!} + \ldots$

Mit $\frac{n}{n!} = \frac{n}{n \cdot (n-1)!}$ gilt: $\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} + \ldots$

Das ist die negative Reihe für Sinus.

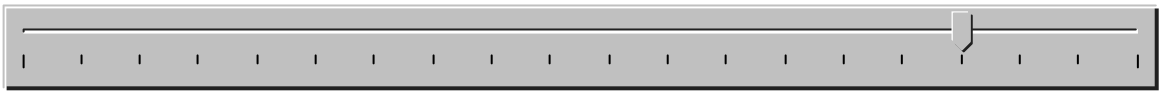
Ableitungsregel (1)	$\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x)$
Ableitungsregel (2)	$\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x)$

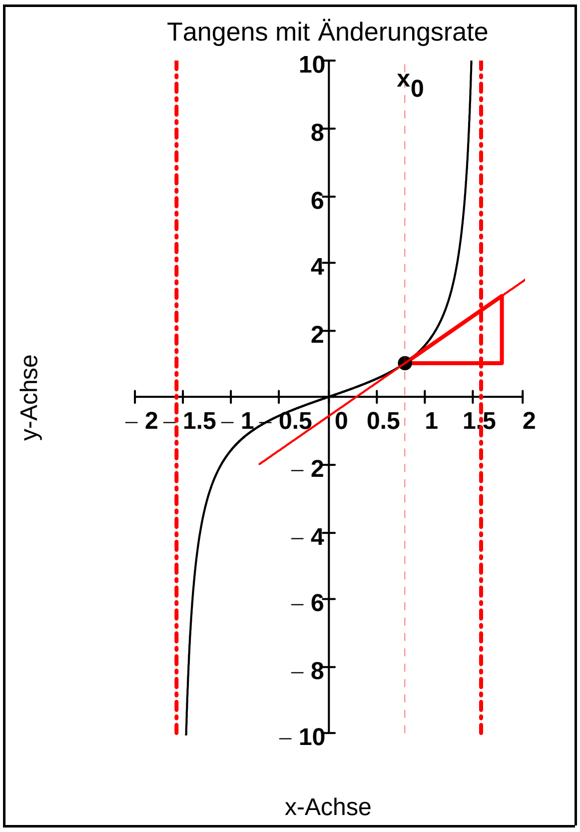
Aufgabe 4

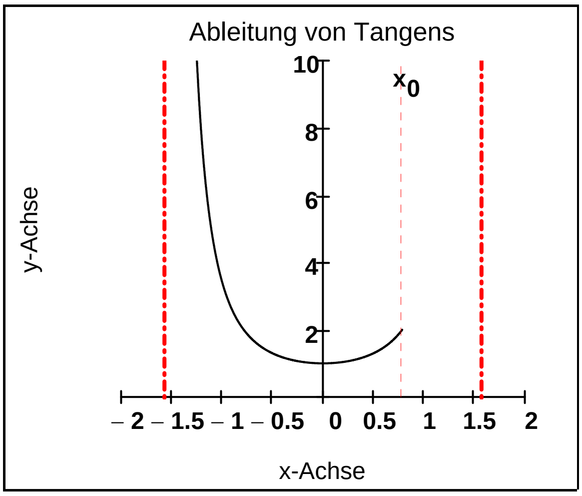
Gegeben ist die Funktionen $f(x) := \tan(x)$ mit $x \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$.

a) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion graphisch mithilfe der Änderungsrate.
c) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion.

Teilaufgabe a)







Änderungsrate: $\Delta(x_0) = 2$

Funktionswert der Ableitungsfunktion:

$$\frac{1}{\cos(x_0)^2} = 2$$

Teilaufgabe b)

$$f(x) = \tan(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{(\cos(x))^2} = \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2}$$

Ableitungsregel (3) $\quad \frac{d}{dx}(\tan(x)) = \frac{1}{(\cos(x))^2}$