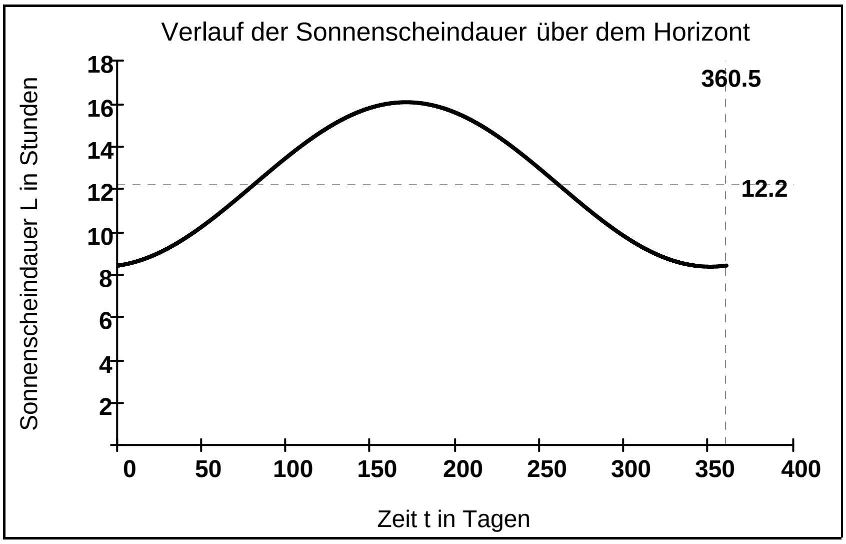
Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2010
Mathematik 12 Technik - Nachtermin Analysis - Lösung

Teilaufgabe 2.0
Im Verlauf eines Jahres ändert sich die Tageslänge L, das heißt die Zeitdauer, während der sich die Sonne oberhalb des Horizonts befindet. In einem mathematischen Modell wird die in Stunden angegebene Tageslänge L in Abhängigkeit von der Zeit t in Tagen beschrieben. Jeder Monat wird hierbei mit 30 Tagen gerechnet, somit hat das Jahr 360 Tage.
Für dieses Modell wird die Zeit t als kontinuierliche reelle Variable betrachtet. Für München ergibt sich für den Zeitraum eines Jahres näherungsweise die Funktion

$L(t) := 12.2 - 3.85 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot t + \frac{\pi}{20}\right)$ mit $t \in [\ 0.5\ ;\ 360.5\ ]$.

Die Einheiten bleiben dabei unberücksichtigt.

Definitionsmenge: $t0 := 0.5, 0.6 .. 360.5$



Teilaufgabe 2.1 **(10 BE)**

Berechnen Sie die Ableitungen $\frac{dL(t)}{dt}$ sowie $\frac{d^2}{dt^2}L(t)$ und bestimmen Sie damit die maximale und minimale Tageslänge für München im Verlauf eines Jahres.

$L'(t) := \frac{d}{dt}L(t) \qquad L'(t) = 0.0672 \cdot \sin(0.0175 \cdot t + 0.157)$

$L''(t) := \frac{d}{dt}L'(t) \qquad L''(t) = 0.00117 \cdot \cos(0.0175 \cdot t + 0.157)$

Bestimmung der Extrempunkte:

$L'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(0.0175 \cdot t + 0.157) = 0$

$\Leftrightarrow \quad t_0(k) := 0.0175 \cdot t + 0.157 = k \cdot \pi \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, t \\ \text{Gleitkommazahl}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 180.0 \cdot k - 8.97$

Lösungen:	$k_1 := 0$	$t_1 := t_0(k_1) = -8.97$	keine Lösung
	$k_2 := 1$	$t_2 := t_0(k_2) = 171.03$	Extremum
	$k_3 := 2$	$t_3 := t_0(k_3) = 351.03$	Extremum

Art des Extremums: $L''(t_2) = -0.001 \quad \Rightarrow$ Maximum

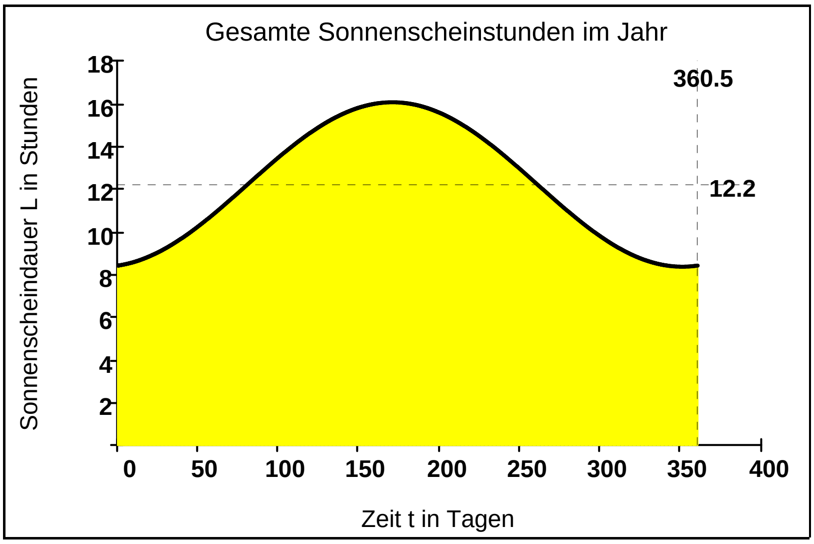
$L''(t_3) = 0.001 \quad \Rightarrow$ Minimum

Maximale Tageslänge: $L(t_2) = 16.05$ Stunden

Minimale Tageslänge: $L(t_3) = 8.35$ Stunden

Teilaufgabe 2.2 **(4 BE)**

Berechnen Sie $\int_{0.5}^{360.5} L(t)\,dt$ und erklären Sie die Bedeutung dieses Integralwerts im gegebenen Sachzusammenhang.



$$L(t) = 12.2 - 3.85 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot t + \frac{\pi}{20}\right)$$

Stammfunktion: $$\int 12.2 - 3.85 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot t + \frac{\pi}{20}\right) dt = 12.2 \cdot x - 3.85 \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{180} \cdot t + \frac{\pi}{20}\right)$$

$$\int_{0.5}^{360.5} 12.2 - 3.85 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot t + \frac{\pi}{20}\right) dt = 4392$$

Die jährliche Sonnenscheindauer beträgt 4392 Stunden.

Teilaufgabe 2.3 (5 BE)
Ermitteln Sie die Zeitpunkte, an denen sich die Tageslängen am schnellsten ändern.

Schnellste Änderungen:

$$L''(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(0.0175 \cdot t + 0.157) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t_w(k) := 0.0175 \cdot t + 0.157 = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \;\left|\; \begin{array}{l} \text{auflösen}, t \\ \text{Gleitkommazahl}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 180.0 \cdot k + 80.8$$

Lösungen:

	$k_1 := 0$	$t_{w1} := t_w(k_1) = 80.8$	Wendepunkt, da Nullstelle mit VZW
	$k_2 := 1$	$t_{w2} := t_w(k_2) = 260.8$	Wendepunkt, da Nullstelle mit VZW
	$k_3 := 2$	$t_{w3} := t_w(k_3) = 440.8$	keine Lösung

Art der Änderungsrate:

$L'(t_{w1}) = 0.067$	$L(t_{w1}) = 12.187$	$\Rightarrow$	größte negative Änderung
$L'(t_{w2}) = -0.067$	$L(t_{w2}) = 12.213$	$\Rightarrow$	größte positive Änderung