

Trigonometrische Funktionen - Aufgaben 1



Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$ und $x \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie die Amplitude und die Periodenlänge im Vergleich zur Sinuskurve und berechnen Sie alle Nullstellen.
- Zeichnen Sie den Graphen G_f im Intervall $x \in [0; 4 \cdot \pi]$.
- Bestimmen Sie die x -Werte, für die der Funktionswert $y_1 := 1$ beträgt.
- Bestimmen Sie die x -Werte, für die der Funktionswert $y_2 := -\sqrt{3}$ beträgt.
- Bestimmen Sie die Fläche zwischen zwei benachbarten Nullstellen.

Teilaufgabe a)

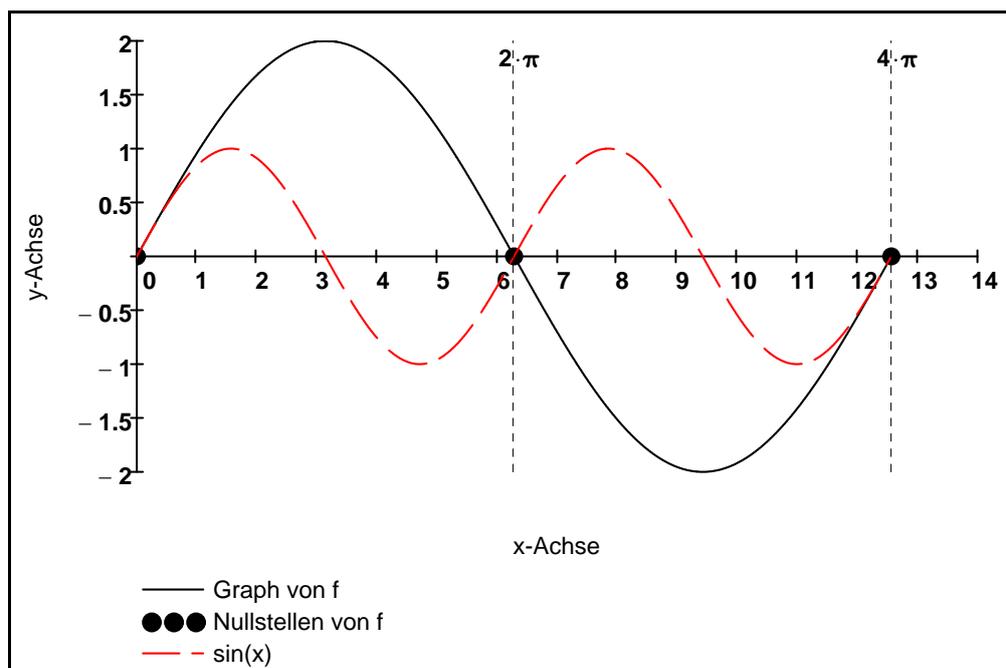
Funktionsterm: $f(x) := 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$

Amplitude: $a := 2$ Periodenlänge: $p := \frac{2 \cdot \pi}{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \pi$

Nullstellen: $\sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = 0$ $\frac{1}{2} \cdot x = k \cdot \pi$ auflösen, $x \rightarrow 2 \cdot \pi \cdot k$

Teilaufgabe b)

Nullstellen im Intervall $[0; 4 \cdot \pi]$ $IL = \{0; 2 \cdot \pi; 4 \cdot \pi\}$



Nullstellen:

$x_0(k) =$

0
6.283
12.566

Teilaufgabe c)

$$2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = \frac{1}{2}$$

Im 1. Quadranten: $\frac{1}{2} \cdot x_1 = \frac{\pi}{6}$ auflösen, $x_1 \rightarrow \frac{\pi}{3}$ $x_{11} := \frac{\pi}{3}$

Im 2. Quadranten: $\frac{1}{2} \cdot x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6}$ auflösen, $x_2 \rightarrow \frac{5 \cdot \pi}{3}$ $x_{12} := \frac{5 \cdot \pi}{3}$

Weitere Lösungen: $k := 0..1$ Periodenlänge. $p = 4 \cdot \pi = 12.566$

$$x_{11}(k) := x_{11} + k \cdot p$$

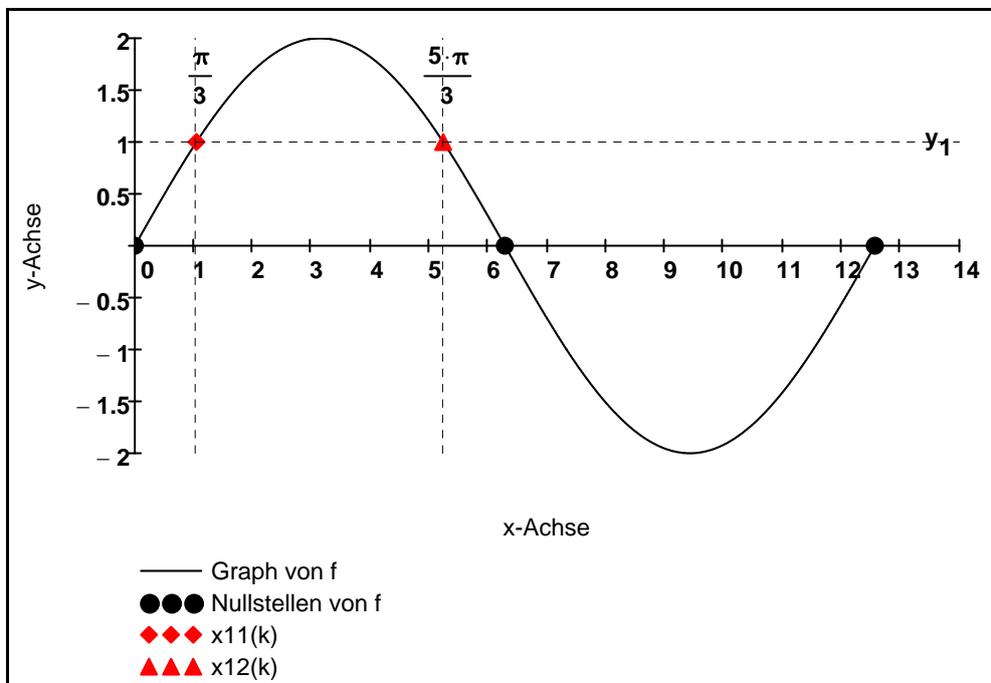
$$x_{12}(k) := x_{12} + k \cdot p$$

$$x_{11}(k) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \frac{13 \cdot \pi}{3} \end{pmatrix}$$

$$x_{11}(k) = \begin{array}{|c|} \hline 1.05 \\ \hline 13.61 \\ \hline \end{array}$$

$$x_{12}(k) = \begin{pmatrix} \frac{5 \cdot \pi}{3} \\ \frac{17 \cdot \pi}{3} \end{pmatrix}$$

$$x_{12}(k) = \begin{array}{|c|} \hline 5.24 \\ \hline 17.8 \\ \hline \end{array}$$



Teilaufgabe d)

$$2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = -\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Im 3. Quadranten: $\frac{1}{2} \cdot x_2 = \frac{4 \cdot \pi}{3}$ auflösen, $x_2 \rightarrow \frac{8 \cdot \pi}{3}$ $x_{21} := \frac{8 \cdot \pi}{3}$

Im 4. Quadranten: $\frac{1}{2} \cdot x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{3}$ auflösen, $x_2 \rightarrow \frac{10 \cdot \pi}{3}$ $x_{22} := \frac{10 \cdot \pi}{3}$

Weitere Lösungen: $k := 0..2$ Periodenlänge. $p = 4 \cdot \pi = 12.566$

$$x_{21}(k) := x_{21} + k \cdot p$$

$$x_{22}(k) := x_{22} + k \cdot p$$

$$x_{21}(k) = \begin{pmatrix} \frac{8 \cdot \pi}{3} \\ \frac{20 \cdot \pi}{3} \\ \frac{32 \cdot \pi}{3} \end{pmatrix}$$

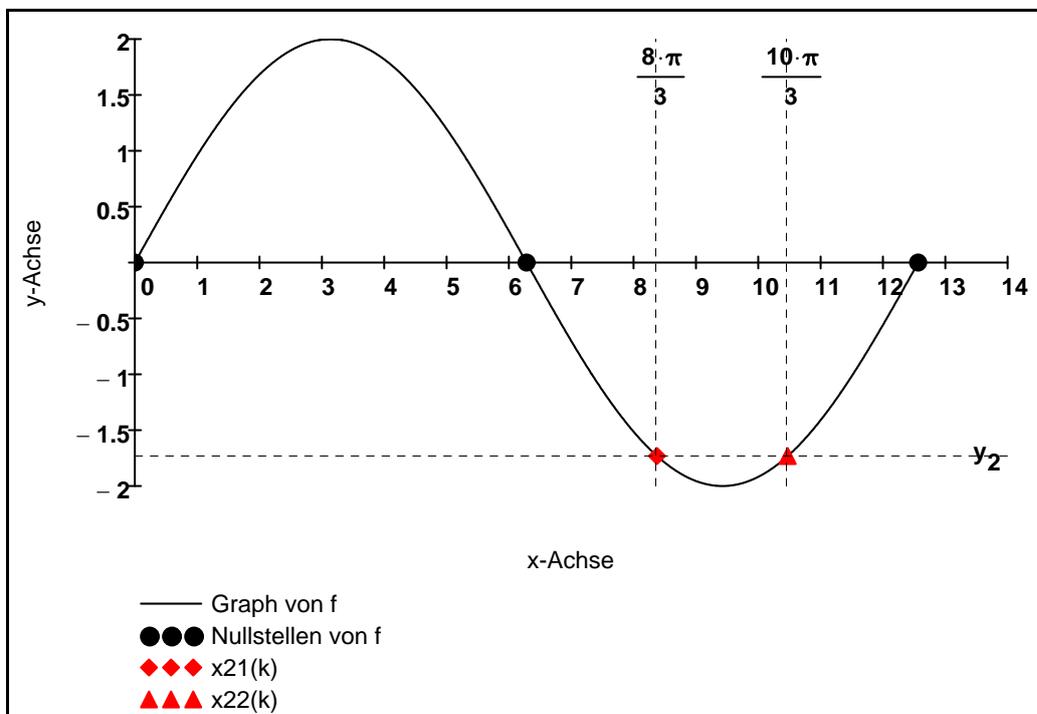
$$x_{21}(k) =$$

8.38
20.94
33.51

$$x_{22}(k) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{10 \cdot \pi}{3} \\ \frac{22 \cdot \pi}{3} \\ \frac{34 \cdot \pi}{3} \end{pmatrix}$$

$$x_{22}(k) =$$

10.47
23.04
35.6



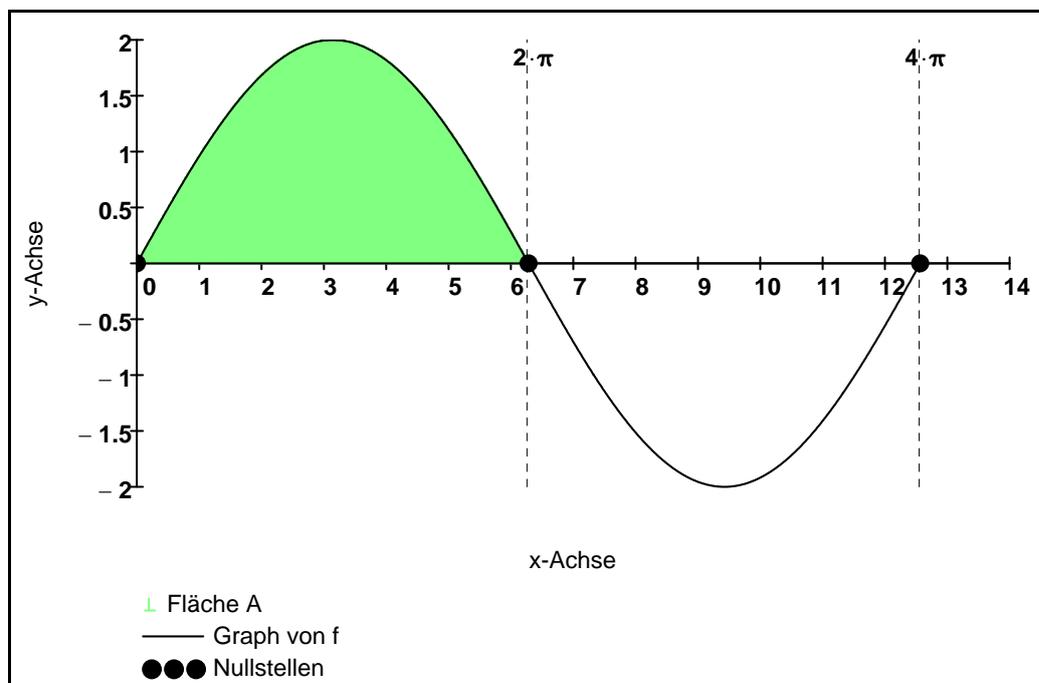
Teilaufgabe e)

Stammfunktion:

$$F(x, C) := \int 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) dx + C \qquad F(x, C) = C - 4 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Flächenberechnung:

$$A := \int_0^{2 \cdot \pi} 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) dx \qquad \mathbf{A = 8}$$



Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$ und $x \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie die Amplitude und die Periodenlänge im Vergleich zur Kosinuskurve und berechnen Sie alle Nullstellen.
- Zeichnen Sie den Graphen G_f im Intervall $x \in [0; 4 \cdot \pi]$.
- Bestimmen Sie die x-Werte, für die der Funktionswert $y_1 := 1$ beträgt.
- Bestimmen Sie die x-Werte, für die der Funktionswert $y_2 := -\sqrt{3}$ beträgt.
- Bestimmen Sie die Fläche zwischen zwei benachbarten Nullstellen.

Teilaufgabe a)

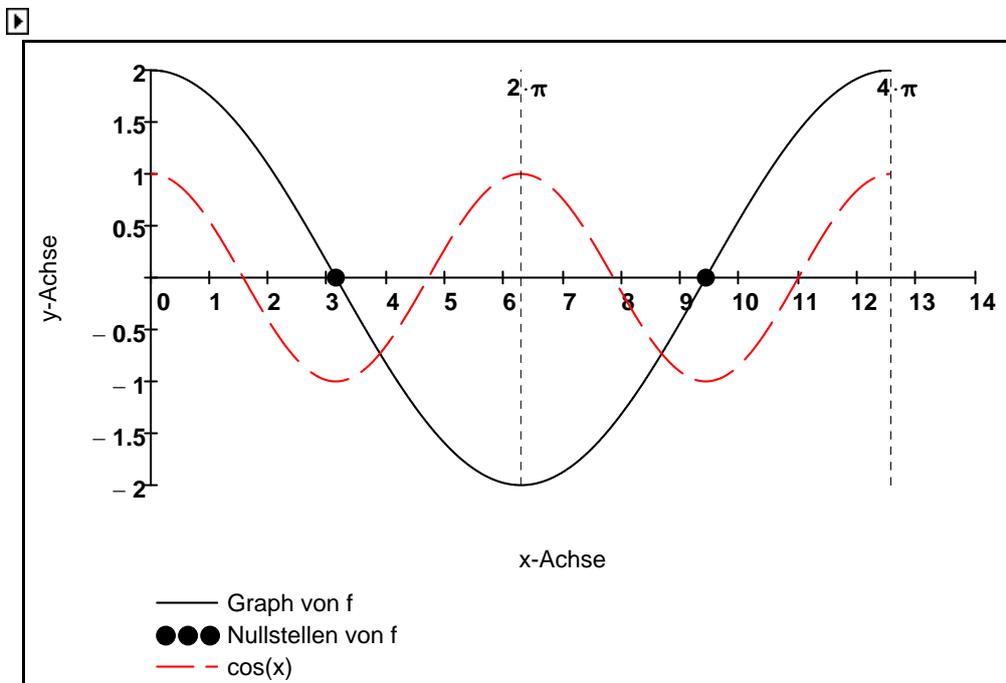
Funktionsterm: $f(x) := 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$

Amplitude: $a := 2$ Periodenlänge: $p := \frac{2 \cdot \pi}{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \pi$

Nullstellen: $\cos\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = 0 \quad \frac{1}{2} \cdot x = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \text{ auflösen, } x \rightarrow \pi + 2 \cdot \pi \cdot k$

Teilaufgabe b)

Nullstellen im Intervall $[0; 4 \cdot \pi]$ $IL = \{ \pi; 3 \cdot \pi \}$



Nullstellen:

$x_0(k) =$

3.142
9.425

Teilaufgabe c)

$$2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = \frac{1}{2}$$

Im 1. Quadranten: $\frac{1}{2} \cdot x_1 = \frac{\pi}{3}$ auflösen, $x_1 \rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{3}$ $x_{11} := \frac{2 \cdot \pi}{3}$

Im 4. Quadranten: $\frac{1}{2} \cdot x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{3}$ auflösen, $x_2 \rightarrow \frac{10 \cdot \pi}{3}$ $x_{12} := \frac{10 \cdot \pi}{3}$

Weitere Lösungen: $k := 0..1$ Periodenlänge. $p = 4 \cdot \pi = 12.566$

$$x_{11}(k) := x_{11} + k \cdot p$$

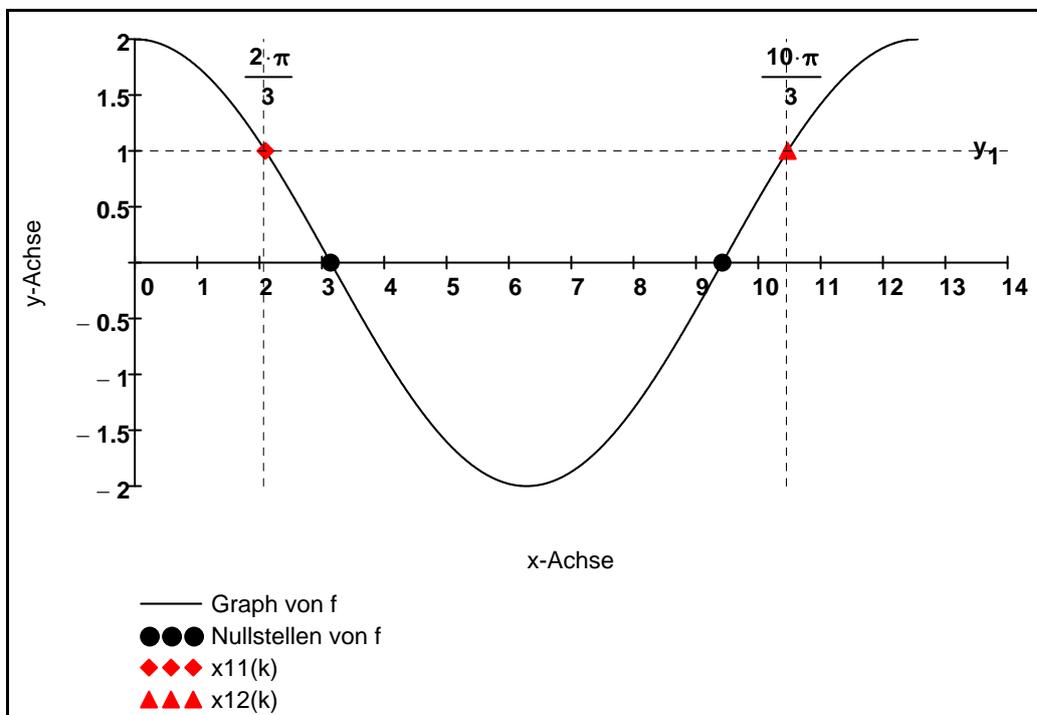
$$x_{12}(k) := x_{12} + k \cdot p$$

$$x_{11}(k) = \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot \pi}{3} \\ 3 \\ \frac{14 \cdot \pi}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_{11}(k) = \begin{array}{|c|} \hline 2.09 \\ \hline 14.66 \\ \hline \end{array}$$

$$x_{12}(k) = \begin{pmatrix} \frac{10 \cdot \pi}{3} \\ 3 \\ \frac{22 \cdot \pi}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_{12}(k) = \begin{array}{|c|} \hline 10.47 \\ \hline 23.04 \\ \hline \end{array}$$



Teilaufgabe d)

$$2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = -\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Im 2. Quadranten: $\frac{1}{2} \cdot x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6}$ auflösen, $x_2 \rightarrow \frac{5 \cdot \pi}{3}$ $x_{21} := \frac{5 \cdot \pi}{3}$

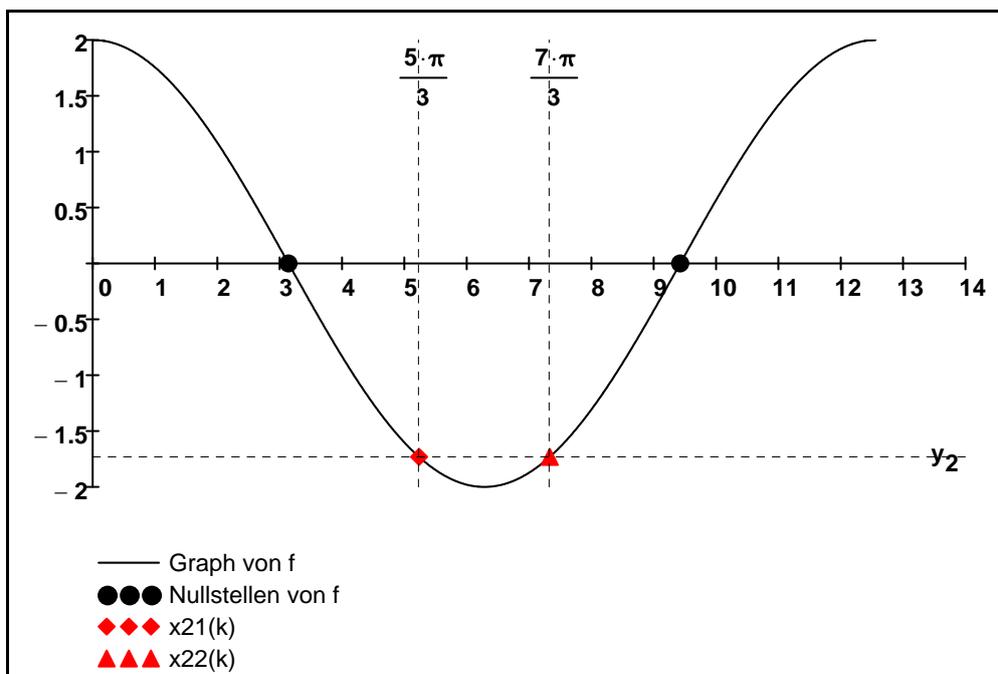
Im 3. Quadranten: $\frac{1}{2} \cdot x_2 = \frac{7 \cdot \pi}{6}$ auflösen, $x_2 \rightarrow \frac{7 \cdot \pi}{3}$ $x_{22} := \frac{7 \cdot \pi}{3}$

Weitere Lösungen: $k := 0..1$ Periodenlänge. $p = 4 \cdot \pi = 12.566$

$$x_{21}(k) := x_{21} + k \cdot p$$

$$x_{22}(k) := x_{22} + k \cdot p$$

$$x_{21}(k) = \begin{pmatrix} \frac{5 \cdot \pi}{3} \\ 3 \\ \frac{17 \cdot \pi}{3} \\ 3 \end{pmatrix} \quad x_{21}(k) = \begin{array}{|c|} \hline 5.24 \\ \hline 17.8 \\ \hline \end{array} \quad x_{22}(k) = \begin{pmatrix} \frac{7 \cdot \pi}{3} \\ 3 \\ \frac{19 \cdot \pi}{3} \\ 3 \end{pmatrix} \quad x_{22}(k) = \begin{array}{|c|} \hline 7.33 \\ \hline 19.9 \\ \hline \end{array}$$



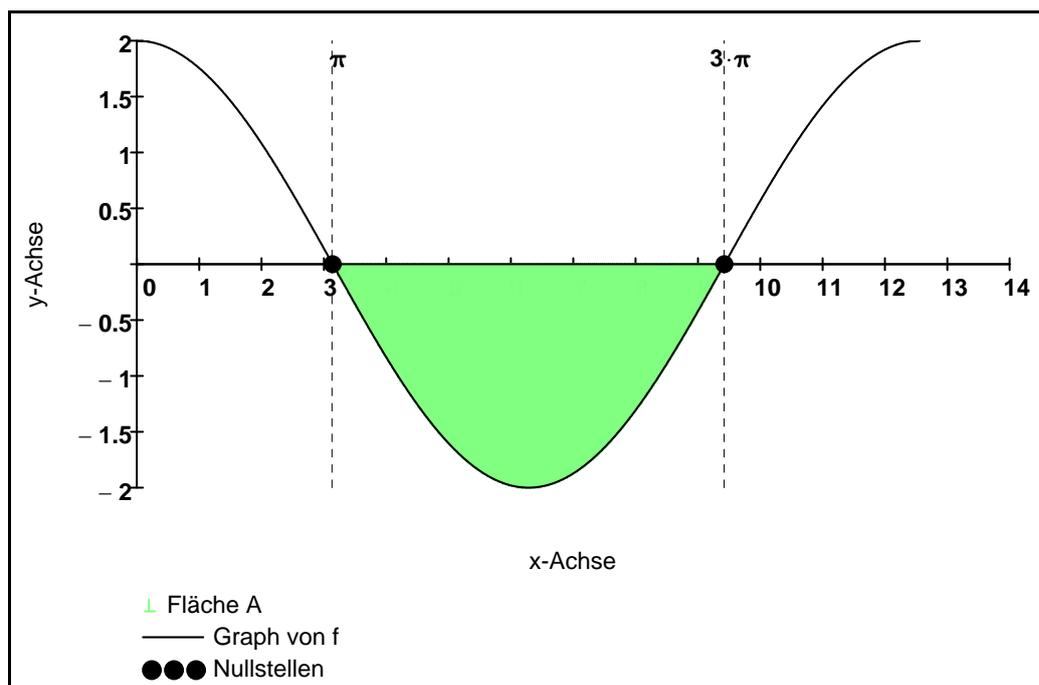
Teilaufgabe e)

Stammfunktion:

$$F(x, C) := \int 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) dx + C \qquad F(x, C) = C + 4 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Flächenberechnung:

$$A := - \int_{\pi}^{3 \cdot \pi} 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) dx \qquad A = 8$$



Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right)$ und $x \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie die Amplitude, die Periodenlänge und die Verschiebung längs der x-Achse im Vergleich zur Sinuskurve und berechnen Sie alle Nullstellen.
- Zeichnen Sie den Graphen G_f im Intervall $x \in [0; 2 \cdot \pi]$.
- Bestimmen Sie die x-Werte, für die der Funktionswert $y_1 := 1$ beträgt.
- Bestimmen Sie die x-Werte, für die der Funktionswert $y_2 := -\sqrt{2}$ beträgt.
- Bestimmen Sie die Fläche zwischen zwei benachbarten Nullstellen.

Teilaufgabe a)

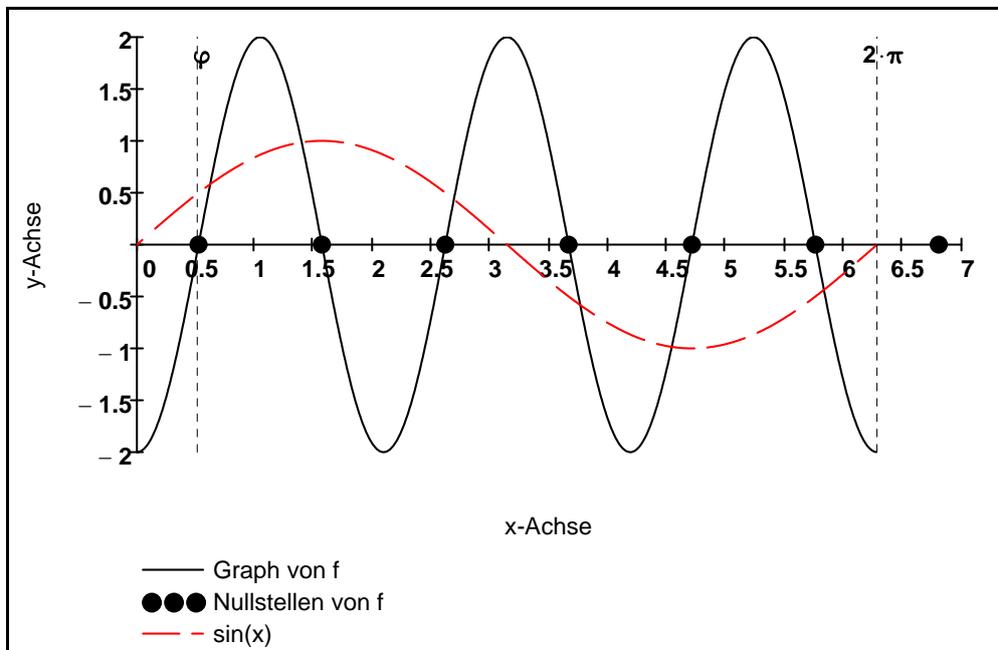
Funktionsterm: $f(x) := 2 \cdot \sin\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right)$

Amplitude: $a := 2$ Periodenlänge: $p := \frac{2 \cdot \pi}{3}$ Phase: $\varphi := \frac{\pi}{6}$ nach rechts

Nullstellen: $\sin\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ $3 \cdot x - \frac{\pi}{2} = k \cdot \pi$ auflösen, $x \rightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{\pi \cdot k}{3}$

Teilaufgabe b)

Nullstellen im Intervall $[0; 2 \cdot \pi]$ $IL = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5 \cdot \pi}{6}; \frac{7 \cdot \pi}{6}; \frac{3 \cdot \pi}{2}; \frac{11 \cdot \pi}{6} \right\}$



Nullstellen:

$x_0(k) =$

0.524
1.571
2.618
3.665
4.712
5.76
6.807

Teilaufgabe c)

$$2 \cdot \sin\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Im 1. Quadranten: $3 \cdot x_1 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$ auflösen, $x_1 \rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{9}$ $x_{11} := \frac{2 \cdot \pi}{9}$

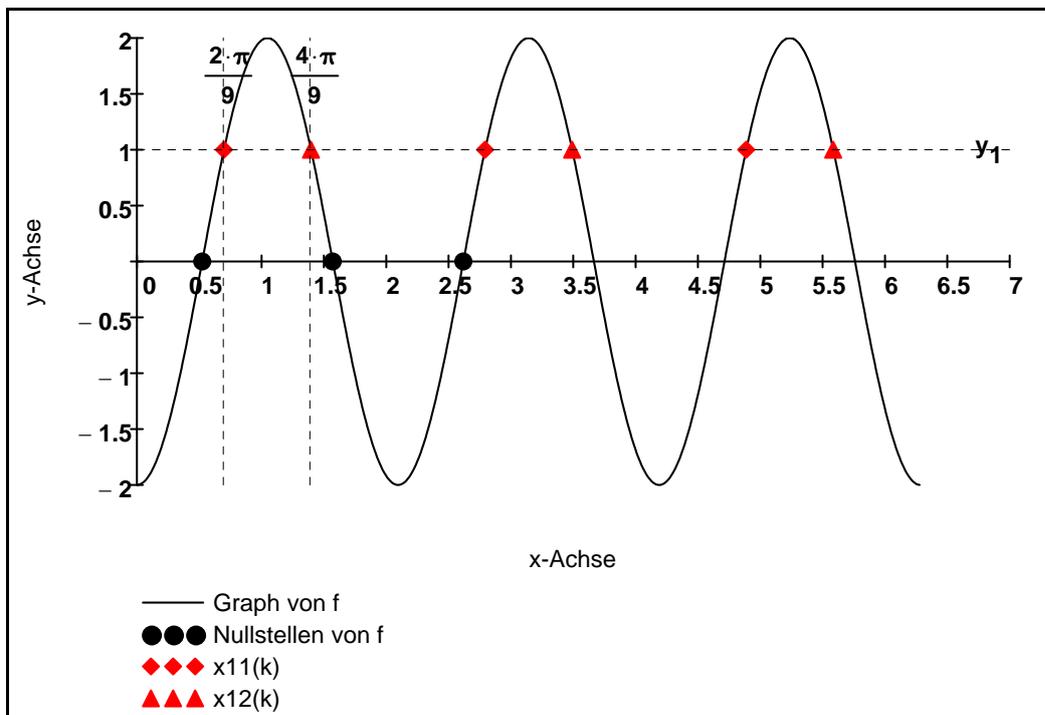
Im 2. Quadranten: $3 \cdot x_2 - \frac{\pi}{2} = \frac{5 \cdot \pi}{6}$ auflösen, $x_2 \rightarrow \frac{4 \cdot \pi}{9}$ $x_{12} := \frac{4 \cdot \pi}{9}$

Weitere Lösungen: $k := 0..2$ Periodenlänge. $p \rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{3} = 2.094$

$$x_{11}(k) := x_{11} + k \cdot p$$

$$x_{12}(k) := x_{12} + k \cdot p$$

$$x_{11}(k) = \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot \pi}{9} \\ \frac{8 \cdot \pi}{9} \\ \frac{14 \cdot \pi}{9} \end{pmatrix} \quad x_{11}(k) = \begin{array}{|c|} \hline 0.7 \\ \hline 2.79 \\ \hline 4.89 \\ \hline \end{array} \quad x_{12}(k) = \begin{pmatrix} \frac{4 \cdot \pi}{9} \\ \frac{10 \cdot \pi}{9} \\ \frac{16 \cdot \pi}{9} \end{pmatrix} \quad x_{12}(k) = \begin{array}{|c|} \hline 1.4 \\ \hline 3.49 \\ \hline 5.59 \\ \hline \end{array}$$



Teilaufgabe d)

$$2 \cdot \sin\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

Im 3. Quadranten: $3 \cdot x_2 - \frac{\pi}{2} = \frac{5 \cdot \pi}{4}$ auflösen, $x_2 \rightarrow \frac{7 \cdot \pi}{12}$ $x_{21} := \frac{7 \cdot \pi}{12}$

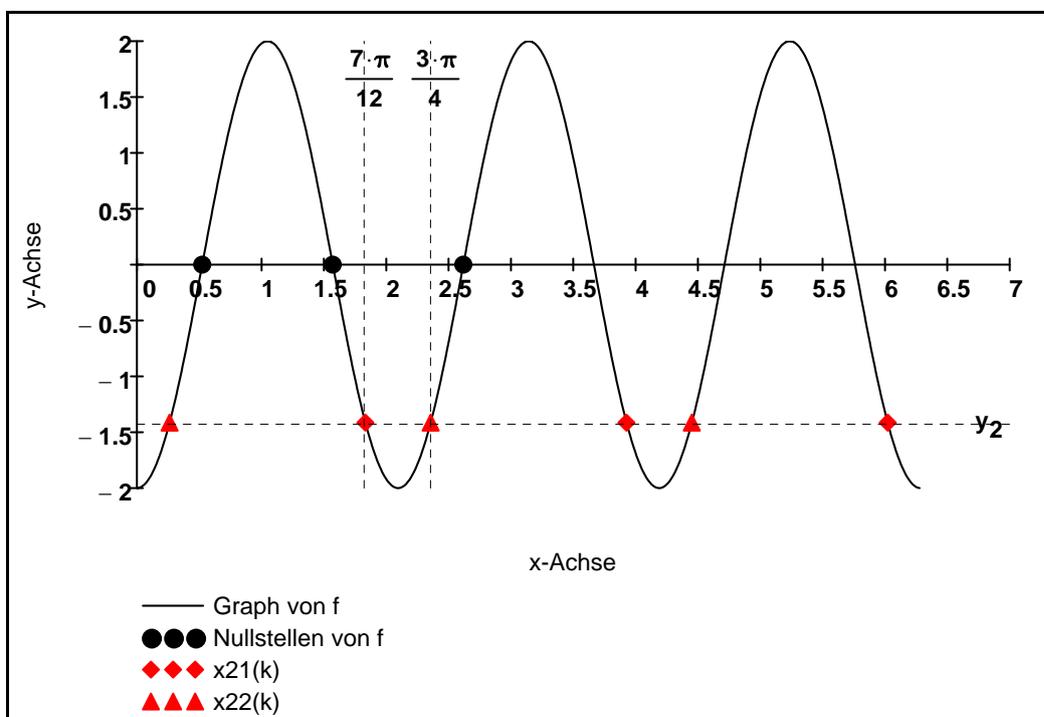
Im 4. Quadranten: $3 \cdot x_2 - \frac{\pi}{2} = \frac{7 \cdot \pi}{4}$ auflösen, $x_2 \rightarrow \frac{3 \cdot \pi}{4}$ $x_{22} := \frac{3 \cdot \pi}{4}$

Weitere Lösungen: $k := 0..2$ Periodenlänge. $p \rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{3} = 2.094$

$$x_{21}(k) := x_{21} + k \cdot p$$

$$x_{22}(k) := x_{22} + k \cdot p$$

$$x_{21}(k) = \begin{pmatrix} \frac{7 \cdot \pi}{12} \\ \frac{5 \cdot \pi}{4} \\ \frac{23 \cdot \pi}{12} \end{pmatrix} \quad x_{21}(k) = \begin{array}{|c|} \hline 1.83 \\ \hline 3.93 \\ \hline 6.02 \\ \hline \end{array} \quad x_{22}(k) = \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot \pi}{4} \\ \frac{17 \cdot \pi}{12} \\ \frac{25 \cdot \pi}{12} \\ \frac{12}{12} \end{pmatrix} \quad x_{22}(k) = \begin{array}{|c|} \hline 2.36 \\ \hline 4.45 \\ \hline 6.54 \\ \hline \end{array}$$



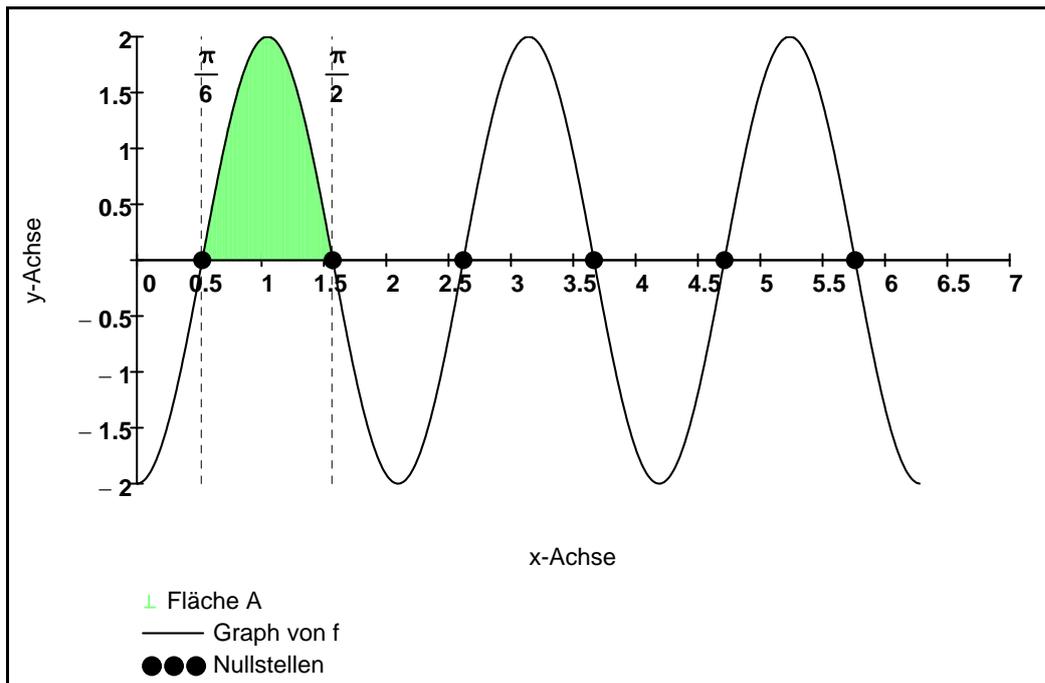
Teilaufgabe e)

Stammfunktion:

$$F(x, C) := \int 2 \cdot \sin\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) dx + C \qquad F(x, C) = C - \frac{2 \cdot \cos\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right)}{3}$$

Flächenberechnung:

$$A := \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot \sin\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) dx \qquad A = \frac{4}{3} = 1.333$$



Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2 \cdot \cos\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right)$ und $x \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie die Amplitude, die Periodenlänge und die Verschiebung längs der x-Achse im Vergleich zur Kosinuskurve und berechnen Sie alle Nullstellen.
- Zeichnen Sie den Graphen G_f im Intervall $x \in [0; 2 \cdot \pi]$.
- Bestimmen Sie die x-Werte, für die der Funktionswert $y_1 := 1$ beträgt.
- Bestimmen Sie die x-Werte, für die der Funktionswert $y_2 := -\sqrt{2}$ beträgt.
- Bestimmen Sie die Fläche zwischen zwei benachbarten Nullstellen.

Teilaufgabe a)

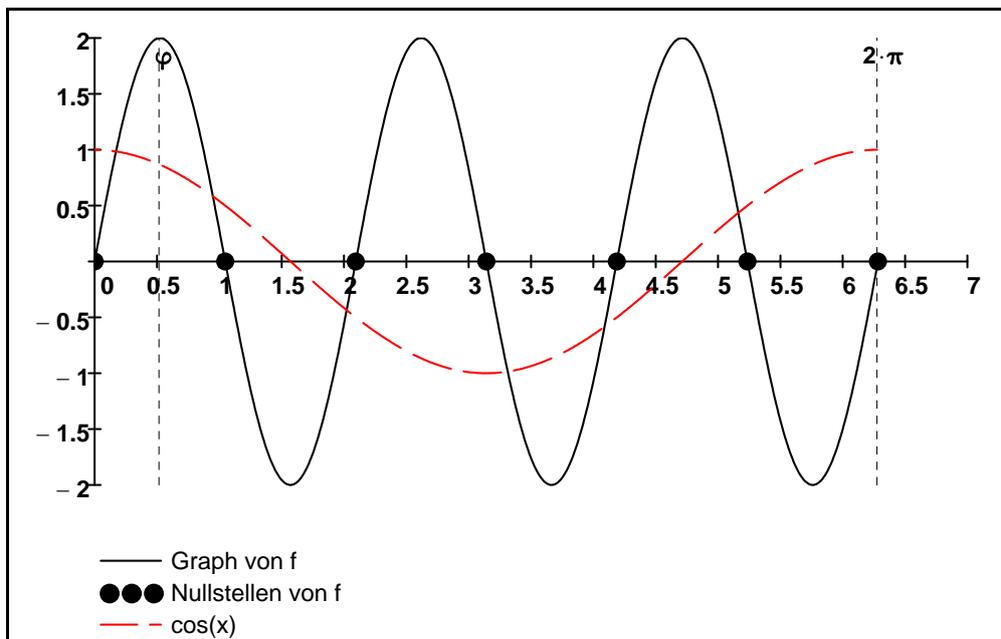
Funktionsterm: $f(x) := 2 \cdot \cos\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right)$

Amplitude: $a := 2$ Periodenlänge: $p := \frac{2 \cdot \pi}{3}$ Phase: $\varphi := \frac{\pi}{6}$ nach rechts

Nullstellen: $\cos\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad 3 \cdot x - \frac{\pi}{2} = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \text{ auflösen, } x \rightarrow \frac{\pi}{3} + \frac{\pi \cdot k}{3}$

Teilaufgabe b)

Nullstellen im Intervall $[0; 2 \cdot \pi]$ $IL = \left\{ 0; \frac{\pi}{3}; \frac{2 \cdot \pi}{3}; \pi; \frac{4 \cdot \pi}{3}; \frac{5 \cdot \pi}{3}; 2 \cdot \pi \right\}$



Nullstellen:

$x_0(k) =$

0
1.047
2.094
3.142
4.189
5.236
6.283

Teilaufgabe c)

$$2 \cdot \cos\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Im 1. Quadranten: $3 \cdot x_1 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$ auflösen, $x_1 \rightarrow \frac{5 \cdot \pi}{18}$ $x_{11} := \frac{5 \cdot \pi}{18}$

Im 4. Quadranten: $3 \cdot x_2 - \frac{\pi}{2} = \frac{5 \cdot \pi}{3}$ auflösen, $x_2 \rightarrow \frac{13 \cdot \pi}{18}$ $x_{12} := \frac{13 \cdot \pi}{18}$

Weitere Lösungen: $k := -1 \dots 2$ Periodenlänge. $p = \frac{2 \cdot \pi}{3} = 2.094$

$$x_{11}(k) := x_{11} + k \cdot p$$

$$x_{12}(k) := x_{12} + k \cdot p$$

$$x_{11}(k) = \begin{pmatrix} \frac{7 \cdot \pi}{18} \\ \frac{5 \cdot \pi}{18} \\ \frac{17 \cdot \pi}{18} \\ \frac{29 \cdot \pi}{18} \end{pmatrix}$$

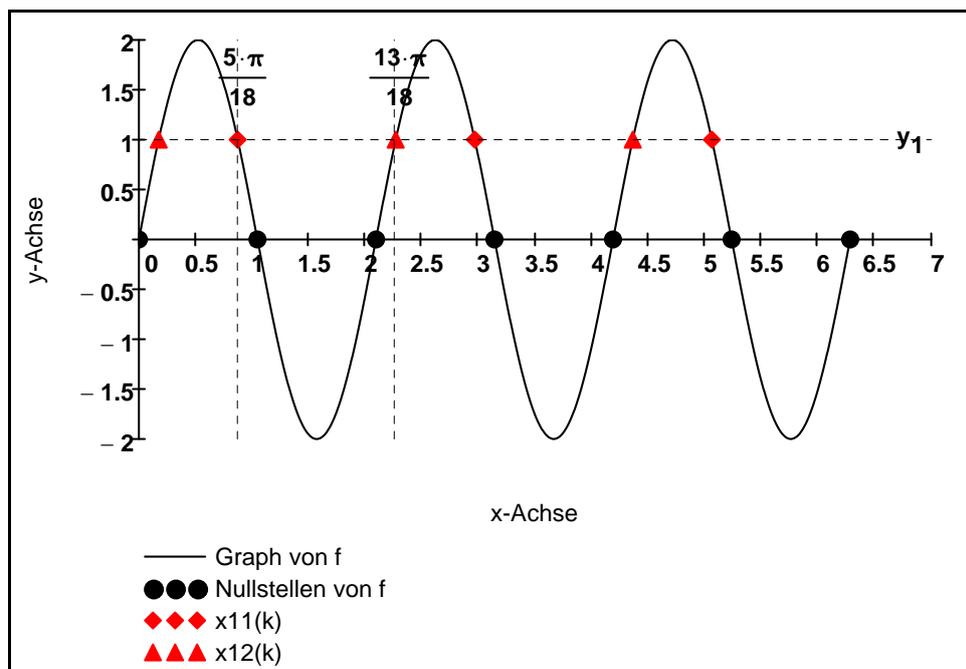
$$x_{11}(k) =$$

-1.22
0.87
2.97
5.06

$$x_{12}(k) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{18} \\ \frac{13 \cdot \pi}{18} \\ \frac{25 \cdot \pi}{18} \\ \frac{37 \cdot \pi}{18} \end{pmatrix}$$

$$x_{12}(k) =$$

0.17
2.27
4.36
6.46



Teilaufgabe d)

$$2 \cdot \cos\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

Im 2. Quadranten: $3 \cdot x_2 - \frac{\pi}{2} = \frac{3 \cdot \pi}{4}$ auflösen, $x_2 \rightarrow \frac{5 \cdot \pi}{12}$ $x_{21} := \frac{5 \cdot \pi}{12}$

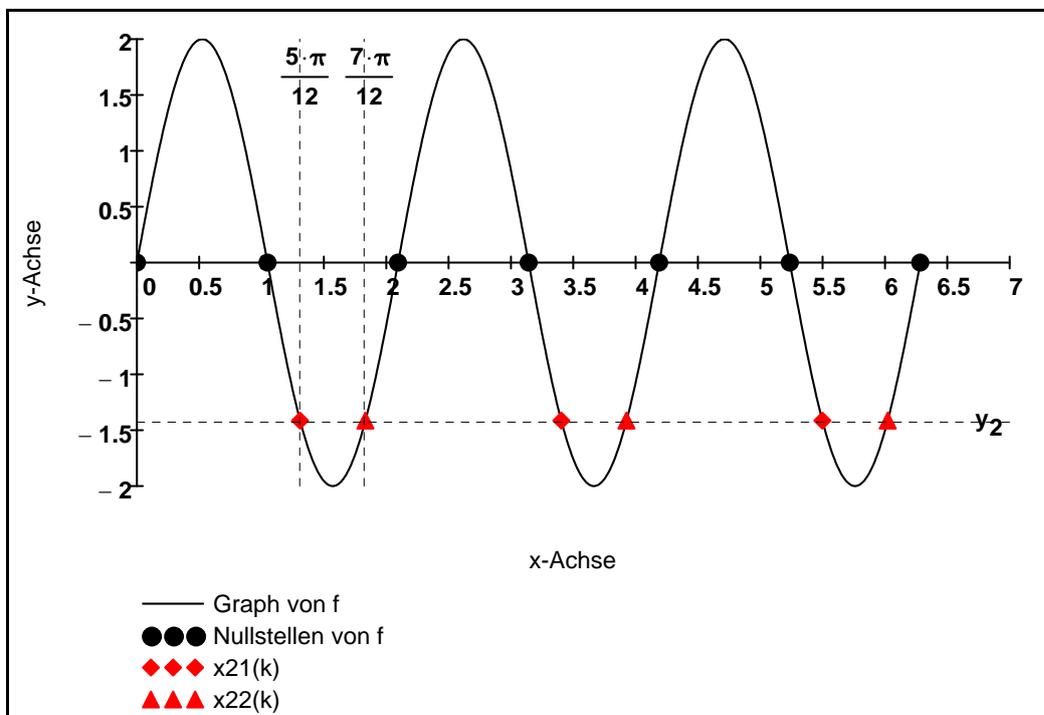
Im 3. Quadranten: $3 \cdot x_2 - \frac{\pi}{2} = \frac{5 \cdot \pi}{4}$ auflösen, $x_2 \rightarrow \frac{7 \cdot \pi}{12}$ $x_{22} := \frac{7 \cdot \pi}{12}$

Weitere Lösungen: $k := 0..2$ Periodenlänge. $p = \frac{2 \cdot \pi}{3} = 2.094$

$$x_{21}(k) := x_{21} + k \cdot p$$

$$x_{22}(k) := x_{22} + k \cdot p$$

$$x_{21}(k) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{5 \cdot \pi}{12} \\ \frac{13 \cdot \pi}{12} \\ \frac{7 \cdot \pi}{4} \end{pmatrix} \quad x_{21}(k) = \begin{array}{|c|} \hline 1.31 \\ \hline 3.4 \\ \hline 5.5 \\ \hline \end{array} \quad x_{22}(k) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{7 \cdot \pi}{12} \\ \frac{5 \cdot \pi}{4} \\ \frac{23 \cdot \pi}{12} \end{pmatrix} \quad x_{22}(k) = \begin{array}{|c|} \hline 1.83 \\ \hline 3.93 \\ \hline 6.02 \\ \hline \end{array}$$



Teilaufgabe e)

Stammfunktion:

$$F(x, C) := \int 2 \cdot \cos\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) dx + C \qquad F(x, C) = C + \frac{2 \cdot \sin\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right)}{3}$$

Flächenberechnung:

$$A := - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2 \cdot \pi}{3}} 2 \cdot \cos\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) dx \qquad A = \frac{4}{3} = 1.333$$

