Trigonometrische Funktionen - Aufgaben 2

Aufgabe 1: Abschlussprüfung 1999 / AI

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{2}{\pi}\cdot\sin\left[\frac{\pi}{2}\cdot(x+1)\right]$ und $x \in IR$.

a) Ermitteln Sie alle Nullstellen und Extrempunkte der Funktion f.
b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f nach Berechnung geeigneter Funktionswerte im Bereich $-5 \le x \le 5$.

Teilaufgabe a)

$$f(x) := \frac{2}{\pi}\cdot\sin\left[\frac{\pi}{2}\cdot(x+1)\right]$$

Nullstellen: $\frac{\pi}{2}\cdot(x+1) = k\cdot\pi \quad \Leftrightarrow \quad x+1 = 2\cdot k \quad \Leftrightarrow \quad x_0(k) := (2\cdot k - 1)$

Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx}f(x) \;=\; \cos\left[\frac{\pi\cdot(x+1)}{2}\right]$

Horizontale Tangenten: $f'(x) = 0 \rightarrow \cos\left[\frac{\pi\cdot(x+1)}{2}\right] = 0$

$x_1(k) := \frac{\pi\cdot(x+1)}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot(2\cdot k+1) \text{ auflösen}, x \;\rightarrow 2\cdot k \qquad x_1(k) := 2\cdot k$

Nullstellen:

$k := -2..3$

$x_0(k) =$

-5
-3
-1
1
3
5

Hochpunkte:

$k1 := -2, 0..4$

$x_1(k1) =$

-4
0
4
8

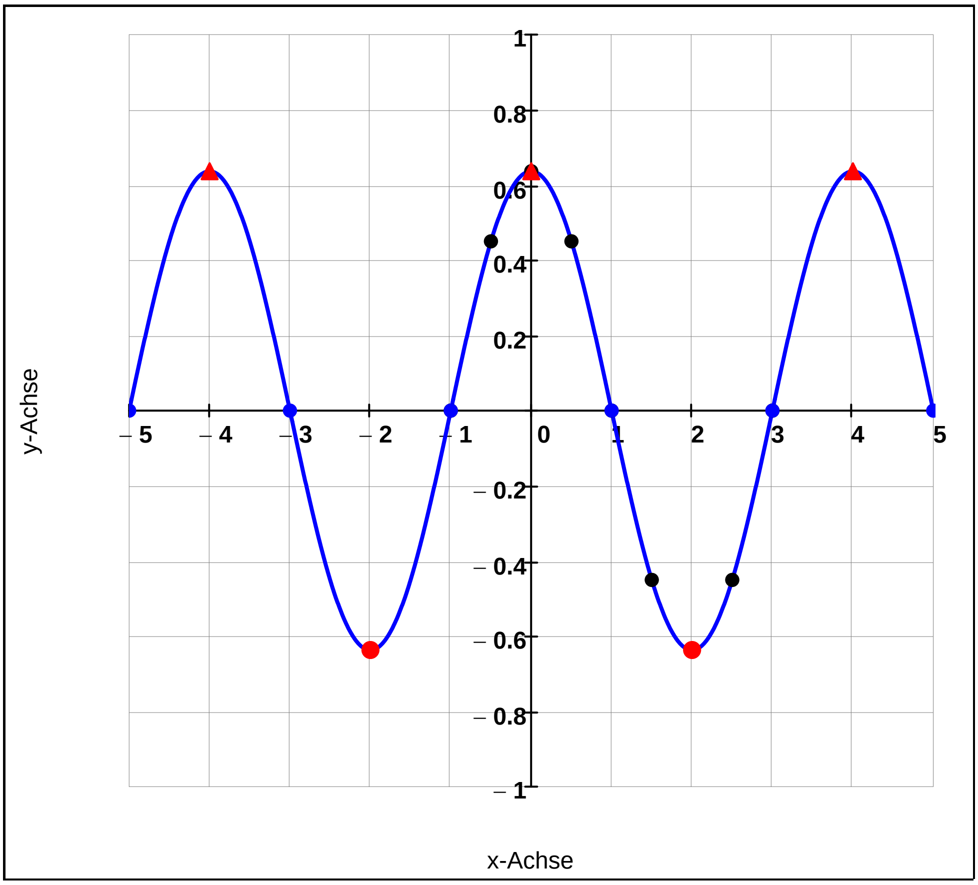
Tiefpunkte:

$k2 := -1, 1..3$

$x_1(k2) =$

-2
2
6

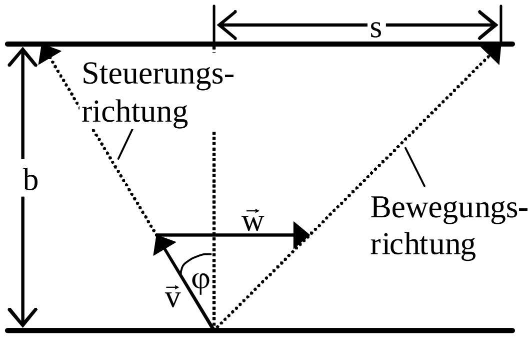
Teilaufgabe b)



$x_W =$	$f(x_W) =$
-1	0.00
-0.5	0.45
0	0.64
0.5	0.45
1	0.00
1.5	-0.45
2	-0.64
2.5	-0.45
3	0.00

Aufgabe 2: Abschlussprüfung 1999 / A II

Ein Motorboot überquert einen Fluss der Breite b, dessen Fließgeschwindigkeit w als konstant angenommen werden kann. Das Boot fährt mit der konstanten Eigengeschwindigkeit $\mathbf{v} < \mathbf{w}$.
Wegen $\mathbf{v} < \mathbf{w}$ erfährt das Boot in jedem Fall eine Abdrift **S**. Um die Abdrift **S** möglichst klein zu halten, wird das Boot unter einem Vorhaltewinkel φ gegen die direkte Überquerungsrichtung gesteuert (siehe Skizze).



Die Abdrift **S** als Funktion des Vorhaltewinkels φ ist gegeben durch:

$$S(\varphi) = \frac{b}{v} \cdot \frac{w - v \cdot \sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

mit $\varphi \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

a) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $S(\varphi)$ an den Randstellen des gegebenen Definitionsbereichs.
b) Zeigen Sie, dass für die erste Ableitungsfunktion der Funktion $S(\varphi)$ gilt:

$$\frac{d}{d\varphi} S(\varphi) = \frac{b}{v} \cdot \frac{-v + w \cdot \sin(\varphi)}{(\cos(\varphi))^2}$$

c) Bestimmen Sie den Vorhaltewinkel φ_0, bei dem das Boot die geringste Abdrift erfährt, wenn es die Eigengeschwindigkeit $v = 1.0 \cdot \frac{m}{s}$ und der Fluss die Breite $b = 20 \cdot m$ und die Fließgeschwindigkeit $w = 2.0 \cdot \frac{m}{s}$ besitzt. Wie groß ist in diesem Fall die Abdrift?
d) Zeigen Sie, dass sich das Boot für den in Teilaufgabe c) behandelten Fall senkrecht zur Steuerungsrichtung bewegt.

Teilaufgabe a)

Funktionsterm: $$S(\varphi, v, w, b) := \frac{b}{v} \cdot \frac{w - v \cdot \sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

linker Randwert: $$S(0, v, w, b) \rightarrow \frac{b \cdot w}{v}$$

rechter Randwert: $$\lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}^-} \left[\frac{b}{v} \cdot \frac{(w - v \cdot \sin(\varphi))}{\cos(\varphi)}\right] \rightarrow \frac{b \cdot \operatorname{signum}(w - v, 0)}{v} \cdot \infty$$

Da $w > v$ folgt $$\lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{b}{v} \cdot \frac{w - v \cdot \sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}\right) \rightarrow \infty$$

Teilaufgabe b)

Ableiten: $S'(\varphi, v, w, b) := \frac{d}{d\varphi} S(\varphi, v, w, b) = \frac{b \cdot \sin(\varphi) \cdot (w - v \cdot \sin(\varphi))}{v \cdot \cos(\varphi)^2} - b$

Vereinfachen: $S'(\varphi, v, w, b) = \frac{b \cdot v - b \cdot w \cdot \sin(\varphi)}{v \cdot \cos(\varphi)^2} = \frac{b \cdot (v - w \cdot \sin(\varphi))}{v \cdot \cos(\varphi)^2}$

Teilaufgabe c)

Horizontale Tangenten: $S'(\varphi, v, w, b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\varphi) \cdot w - v = 0$

Zahlenwerte einsetzen: $\sin(\varphi) = \frac{v}{w} = \frac{1}{2}$

$w = 2.0 \cdot \frac{m}{s} \qquad b = 20 \cdot m \qquad v = 1.0 \cdot \frac{m}{s}$

Auflösen: $\varphi_0 := \text{asin}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \varphi_0 = 30 \cdot \text{Grad}$

$S_1 := S(\varphi_0, v, w, b) = 34.6\,m$ = geringste Abdrift.

linker Randwert: $S(0, v, w, b) = 40\,m$

Da die Funktion im Intervall $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$ stetig ist und φ_0 das einzige Extremum ist, genügt der Vergleich mit den Randwerten (siehe 3.1):

a**bsolutes Minimum** (**30 Grad** / **40 m**)

Teilaufgabe d)

geringste Abdrift: $S_1 := S(\varphi_0, v, w, b)$

Winkel zwischen Lot und Bewegungsrichtung:

$\tan(\varphi_1) := \frac{S_1}{b} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 := \text{atan}\left(\frac{S_1}{b}\right) \qquad \varphi_1 = 1.047 \qquad \varphi_1 = 60 \cdot \text{Grad}$

Gesamtwinkel: $\varphi_{ges} := \varphi_0 + \varphi_1 \qquad \varphi_{ges} = 1.571 \qquad \varphi_{ges} = 90 \cdot \text{Grad}$

Aufgabe 3: AP 2002 / A II

Gegeben ist die Funktion $g(x) = a \cdot \cos(b \cdot x) + c$ mit den Koeffizienten $a,b,c \in IR \setminus \{0\}$ in der Definitionsmenge $D = IR$.

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a,b,c so, dass der Graph der Funktion g durch den Punkt **P(0 / 4)** verläuft und im Punkt **W(1 / 2)** der Wendepunkt mit dem kleinsten positiven x-Wert vorliegt. [Ergebnis: $a = 2$, $b = \frac{\pi}{2}$, $c = 2$]

b) Zeichnen Sie den Graphen von g mit Hilfe geeigneter Funktionswerte für $-2 \le x \le 2$.

Teilaufgabe a)

Funktionsterm: $g(x,a,b,c) := a \cdot \cos(b \cdot x) + c$

1. Ableitung: $g'(x,a,b,c) := \frac{d}{dx} g(x,a,b,c) \;=\; -a \cdot b \cdot \sin(b \cdot x)$

2. Ableitung: $g''(x,a,b,c) := \frac{d}{dx} g'(x,a,b,c) \;=\; -a \cdot b^2 \cdot \cos(b \cdot x)$

$P \in G_g$: $g(0,a,b,c) = 4 \rightarrow a + c = 4$

$W \in G_g$: $g(1,a,b,c) = 2 \rightarrow c + a \cdot \cos(b) = 2$

Wendepunkt: $g''(1,a,b,c) = 0 \rightarrow -a \cdot b^2 \cdot \cos(b) = 0$

Gleichung 1: $a + c = 4$ $\qquad c = 4 - a$

Gleichung 2: $c + a \cdot \cos(b) = 2$

Gleichung 3: $-a \cdot b^2 \cdot \cos(b) = 0$

Da $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ folgt aus (3): $\cos(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\pi}{2} \cdot (2 \cdot k + 1)$

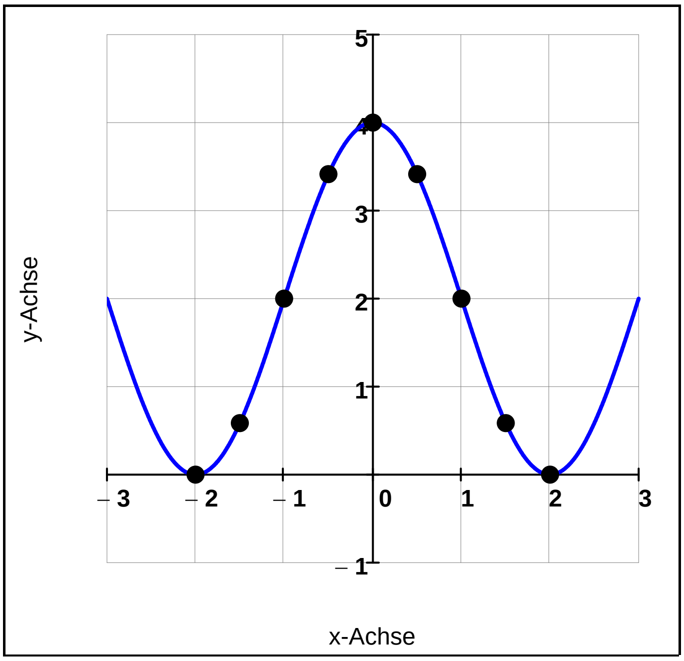
kleinster positiver Wert: $b := \frac{\pi}{2}$

(1) und (3) in (2) einsetzen: $4 - a + a \cdot \cos(b) = 2$

$4 - a = 2$ auflösen, $a \;\rightarrow 2$ $\qquad a := 2$ $\qquad c := 2$

Teilaufgabe b)

$$g(x) := g(x, a, b, c) \rightarrow 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right) + 2$$



$x_W =$	$g(x_W) =$
-2	0
-1.5	0.6
-1	2
-0.5	3.4
0	4
0.5	3.4
1	2
1.5	0.6
2	0

Aufgabe 4: AP 2005 / A I

Gegeben ist die Funktion **g** mit den rellen Parametern a und b:

$g(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ in der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b so, dass der Graph von **g** durch den Punkt **T(1/2)** verläuft und die kleinste positive Nullstelle bei $x = 2$ liegt.

[Ergebnis: $a = 2$; $b = \frac{\pi}{2}$]

Allgemeiner Funktionsterm: $g(x, a, b) := a \cdot \sin(b \cdot x)$

T(1/2) $\in G_f$: (1) $g(1, a, b) = 2 \rightarrow a \cdot \sin(b) = 2$

NS(2/0) $\in G_f$: (2) $g(2, a, b) = 0 \rightarrow a \cdot \sin(2 \cdot b) = 0$

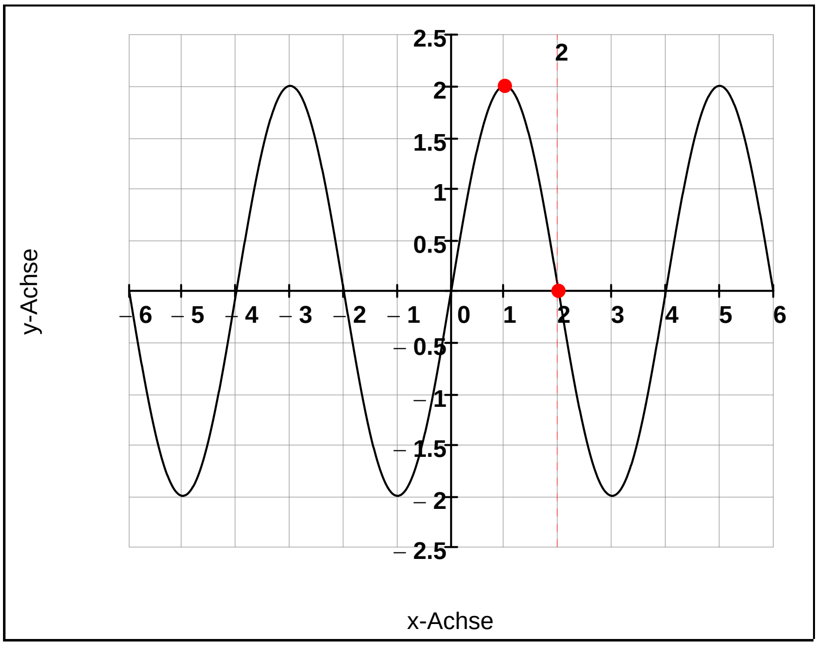
Aus (2): $a = 0 \vee \sin(2 \cdot b) = 0$ $\quad a = 0$ Widerspruch zu (1)

$\Rightarrow$ $a \neq 0$ $\quad 2 \cdot b = k \cdot \pi$ auflösen, b $\rightarrow \frac{\pi \cdot k}{2}$ mit k $\in$ Z

für die kleinste positive NS: k=1 $\quad b := \frac{\pi}{2}$

in (1) $\quad a \cdot \sin(b) = 2$ auflösen, a $\rightarrow 2$ $\quad a = 2$

$$g(x) := 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$$



Aufgabe 5: AP 2006 / A II

Gegeben ist die reelle Funktion $g(x) = x - 4 - \sin(x)$ in der Definitionsmenge $D_g =]\,0\,;\ 2\pi\,[$.

a) Zeigen Sie mithilfe des Monotonieverhaltens, dass die Funktion g in ihrer Definitionsmenge genau eine Nullstelle besitzt.

b) Berechnen Sie diese Nullstelle ausgehend vom Startwert $x_1 = 3$ mit dem Newton-Verfahren. Führen Sie zwei Näherungsschritte durch und geben Sie die für die Berechnung notwendigen Teilergebnisse auf drei Nachkommastellen gerundet an.

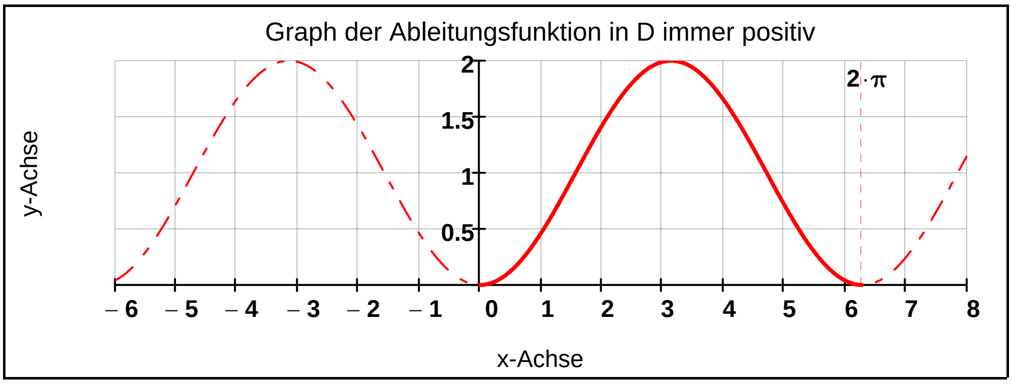
Teilaufgabe a)

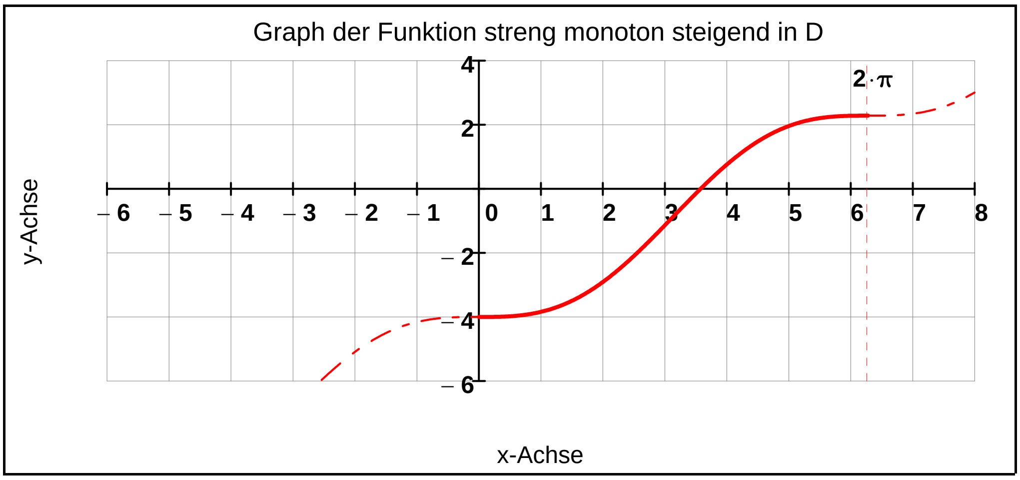
$\lim_{x \to 0^+} g(x) \to -4$ $\qquad\qquad$ $\lim_{x \to 2\pi^-} g(x) \to 2\cdot\pi - 4 \to 2.3$

$g'(x) := \frac{d}{dx} g(x) \to 1 - \cos(x)$ $\quad > 0$ $\qquad$ Die Funktion g(x) ist streng monoton steigend.

Auf Grund der Monotonie und der Randwerte besitzt die Funktion genau eine Nullstelle in ID_g.

Graphische Veranschaulichung (in der Prüfung nicht verlangt):





Teilaufgabe b)

$x_1 := 3$

$$x_2 := x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} = 3.573$$

$$x_3 := x_2 - \frac{g(x_2)}{g'(x_2)} = 3.578$$

NS (3.578 / 0)

Aufgabe 6: AP 2007 / A I

Gegeben ist die Funktion $g(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$ mit den reellen Parametern a, b und c und der Definitionsmenge $D_g = IR$.

Bestimmen Sie die Werte für die Parameter a, b und c so, dass der Graph von g den Tiefpunkt **T (0 / −4)** aufweist und die Periodenlänge 8 besitzt, wobei a und b negativ gewählt werden sollen. Begründen Sie Ihr Vorgehen.

Zeichnen Sie den Graphen von g für $-6 \le x \le 6$.

[Mögliches Teilergebnis: $g(x) = -4 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4} \cdot x + \frac{\pi}{2}\right)$]

Ansatz für Funktionsterm: $g(x, a, b, c) := a \cdot \sin(b \cdot x + c)$

Ableitung: $g'(x, a, b, c) := \frac{d}{dx} g(x, a, b, c) \rightarrow a \cdot b \cdot \cos(c + b \cdot x)$

Periodenlänge: $p = \frac{2 \cdot \pi}{b}$ $\qquad \frac{2 \cdot \pi}{b} = 8 \rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{b} = 8$ auflösen, b $\rightarrow \frac{\pi}{4}$

$b_1 := \frac{1}{4} \cdot \pi$ keine Lösung $\qquad b_2 := -\frac{1}{4} \cdot \pi$

$T(0 / -4) \in G_g$: $\qquad g(0, a, b_2, c) = -4 \rightarrow a \cdot \sin(c) = -4 \qquad (1)$

$g'(0) = 0$ $\qquad g'(0, a, b_2, c) = 0 \rightarrow -\frac{\pi \cdot a \cdot \cos(c)}{4} = 0 \qquad (2)$

Produkt = 0: $\qquad \cos(c) = 0 \qquad c_1 := \operatorname{acos}(0) \qquad c_1 = \frac{\pi}{2}$

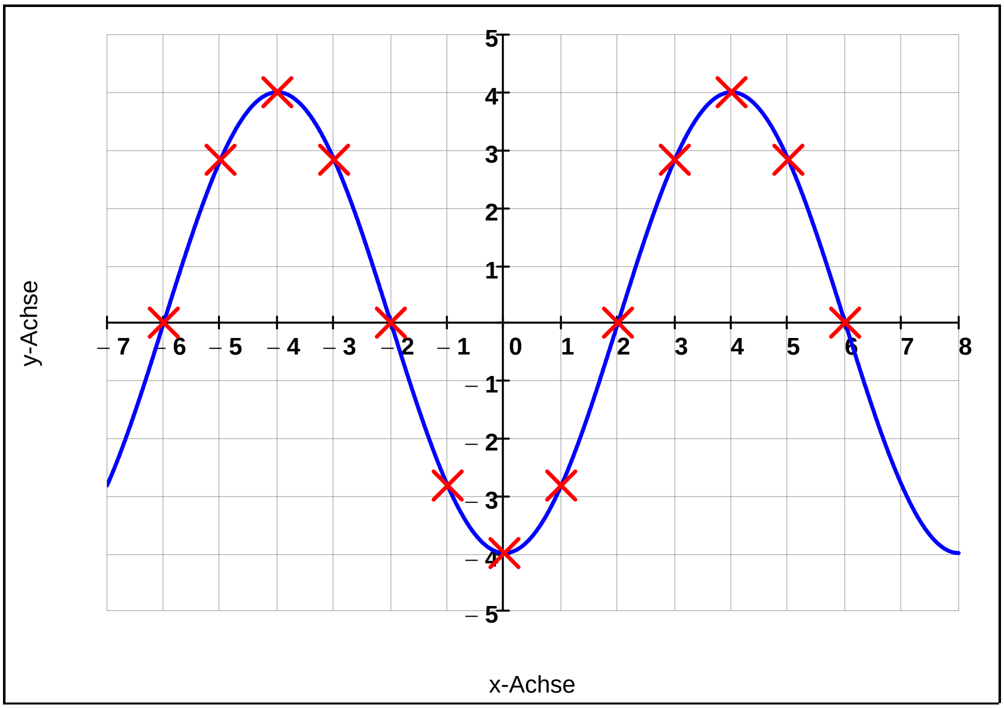
Periodizität von cos(x): $\qquad c_2 := \pi + c_1 \qquad c_2 = \frac{3 \cdot \pi}{2}$ keine Lösung

In (1) einsetzen: $\qquad a \cdot \sin(c_1) = -4$ auflösen, a $\rightarrow -4 \qquad a_1 := -4$

$a \cdot \sin(c_2) = -4$ auflösen, $a \rightarrow 4$ $\quad a_2 := 4$ keine Lösung

Bestimmter Funktionsterm: $g_0(x) := g(x, a_1, b_2, c_1) = -4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi \cdot x}{4}\right)$

Das entspricht dem gegebenen Funktionsterm: $g(x) := -4 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4} \cdot x + \frac{\pi}{2}\right)$



$x_W =$	$g(x_W) =$
-6	0
-5	2.8
-4	4
-3	2.8
-2	0
-1	-2.8
0	-4
1	-2.8
2	0
3	2.8
4	4
5	2.8
6	0