Tangentenaufgaben
bei ganzrationalen Funktionen

Theorie

Die Bestimmung von Tangenten oder Normalen an einen Graphen an der Stelle x_0 ist eine Anwendung der Ableitungsfunktion, mithilfe derer die Steigung in jedem Kurvenpunkt $P(x_0 / f(x_0))$ bestimmt werden kann.

Bestimmung des Funktionsterms der Tangente

- Berechnung des Funktionswertes: $y_0 = f(x_0)$
- Berechnung der Tangentensteigung: $m_t = f'(x_0)$
- Einsetzen in die Punkt-Steigungsform $y_0 = m_t \cdot (x - x_0) + y_0$ liefert den

Funktionsterm der ***Tangente:*** $t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Bestimmung des Funktionsterms der Normalen

- Berechnung des Funktionswertes: $y_0 = f(x_0)$
- Berechnung der Normalensteigung: $m_n = \dfrac{-1}{f'(x_0)}$
- Einsetzen in die Punkt-Steigungsform $y_0 = m_n \cdot (x - x_0) + y_0$ liefert den

Funktionsterm der ***Normale:*** $n(x) = \dfrac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) := -x^2 + 2x$ und $x \in \mathbb{R}$.
a) Zeichen Sie den Graphen der Funktion f mithilfe geeigneter Werte.
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P(x_0 / y_0)$ mit $x_0 := \frac{3}{2}$
c) Tragen Sie den Graphen der Tagente in das Diagramm von a) ein.
d) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen in P und tragen Sie den Graph von n ein.

Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx}f(x) = 2 - 2 \cdot x$

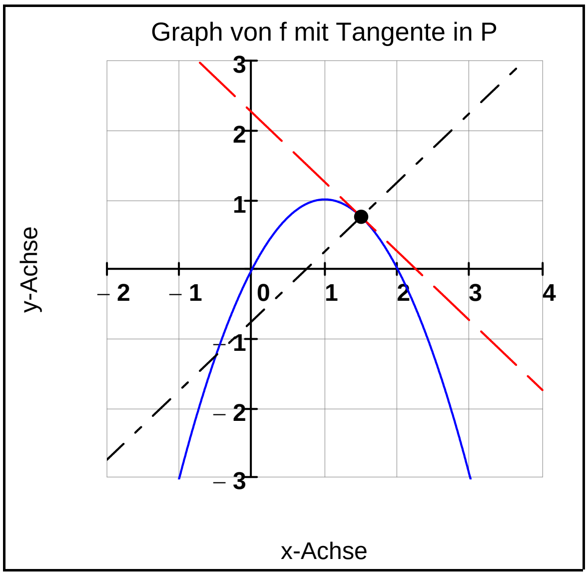
Funktionswert: $y_0 := f(x_0) = \frac{3}{4}$

Steigung: $m_t := f'(x_0) = -1$

Tangente: $t(x) := f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ $\qquad$ $t(x) = \frac{9}{4} - x$

Steigung der Normale: $m_n := \frac{-1}{f'(x_0)} = 1$

Normale: $n(x) := \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ $\qquad$ $n(x) = x - \frac{3}{4}$



Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) := -x^2 + x + 4$ und $x \in \mathbb{R}$.
a) Zeichen Sie den Graphen der Funktion f mithilfe geeigneter Werte.
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente die parallel zur Geraden $g(x) := -x + 1$ ist.
c) Tragen Sie den Graphen der Tagente in das Diagramm von a) ein.
d) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen in P und tragen Sie den Graph von n ein.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen in P und tragen Sie den Graph von n ein.

Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx}f(x) = 1 - 2 \cdot x$

Es wird ein belibiger Punkt P(u/v) auf dem Graphen von f gewählt. $x_0(u) := u$

Funktionswert: $y_0(u) := f(x_0(u)) = u - u^2 + 4$

Steigung: $m_t(u) := f'(x_0(u)) = 1 - 2 \cdot u$

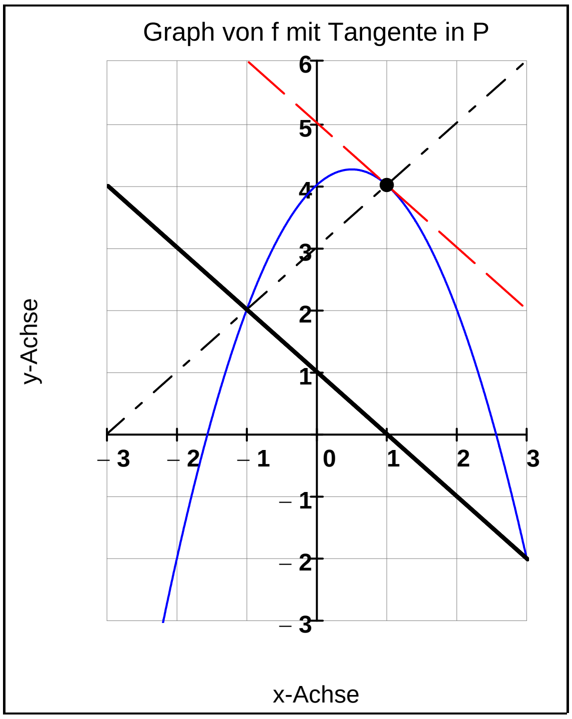
Tangente soll parallel zu der gegebenen Geraden sein:

$m_t(u) = -1 \rightarrow 1 - 2 \cdot u = -1$ **auflösen**, $u \rightarrow 1$

Tangente: $t(x) = 5 - x$

Steigungen der Normalen: $m_{n1} := \frac{-1}{f'(x_0)} = 1$

Normale: $n(x) := \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ $n(x) = x + 3$



Beispiel 3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) := -x^2$ und $x \in IR$.
a) Zeichen Sie den Graphen der Funktion f mithilfe geeigneter Werte.
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente durch den Punkt **Q(0/1)**, wobei Q nicht auf dem Graphen von f liegt.
c) Tragen Sie den Graphen der Tagente in das Diagramm von a) ein.

Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx}f(x) = -2 \cdot x$

Es wird ein belibiger Punkt P(u/v) auf dem Graphen von f gewählt. $x_0(u) := u$

Funktionswert: $y_0(u) := f\left(x_0(u)\right) = -u^2$

Steigung: $m_t(u) := f'\left(x_0(u)\right) = -2 \cdot u$

Tangente: $t(x,u) := f'\left(x_0(u)\right) \cdot \left(x - x_0(u)\right) + f\left(x_0(u)\right)$ $\quad t(x,u) = 2 \cdot u \cdot (u - x) - u^2$

Das ist eine Geradenschar: $t(x,u) = u^2 - 2 \cdot u \cdot x$

Aus dieser Geradenschar wird diejenige Tangente ausgewählt, die durch den Punkt Q verläuft.

Q $\in G_{t:}$ $\quad t(0,u) = 1 \rightarrow u^2 = 1$ auflösen, $u \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

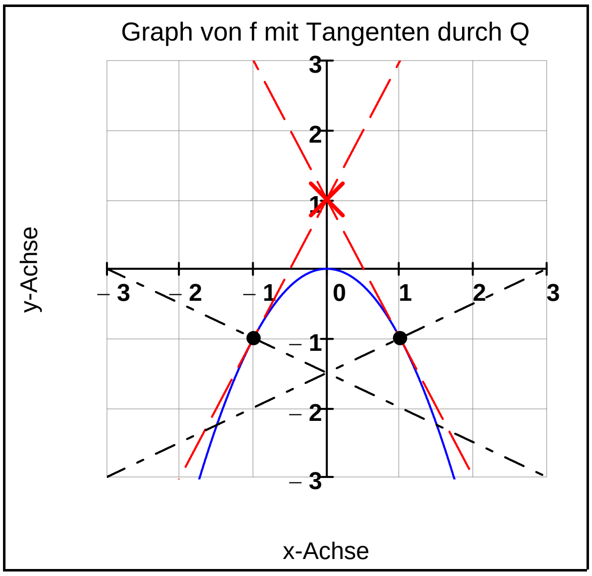
Abrufen der Lösungen: $u_1 = -1$ $\quad u_2 = 1$

Tangentengleichungen: $t_1(x) = 2 \cdot x + 1$ $\quad t_2(x) = 1 - 2 \cdot x$

Steigungen der Normalen: $m_{n1} := \frac{-1}{f'\left(x_1\right)} = -\frac{1}{2}$ $\quad m_{n2} := \frac{-1}{f'\left(x_2\right)} = \frac{1}{2}$

Normalen: $n_1(x) := \frac{-1}{f'\left(x_1\right)} \cdot \left(x - x_1\right) + f\left(x_1\right)$ $\quad n_2(x) := \frac{-1}{f'\left(x_2\right)} \cdot \left(x - x_2\right) + f\left(x_2\right)$

$n_1(x) = -\frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ $\quad n_2(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$



Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit $\mathbf{f(x) := x^2 + 2x + 1}$ und $\mathbf{x \in IR}$.
a) Zeichen Sie den Graphen der Funktion f mithilfe geeigneter Werte.
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $\mathbf{P(x_0 \,/\, y_0)}$ mit $\mathbf{x_0 := 1}$

c) Tragen Sie den Graphen der Tagente in das Diagramm von a) ein.
d) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen in P und tragen Sie den Graph von n ein.

Ableitung: $\mathbf{f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) \;=\; 2 \cdot x + 2}$

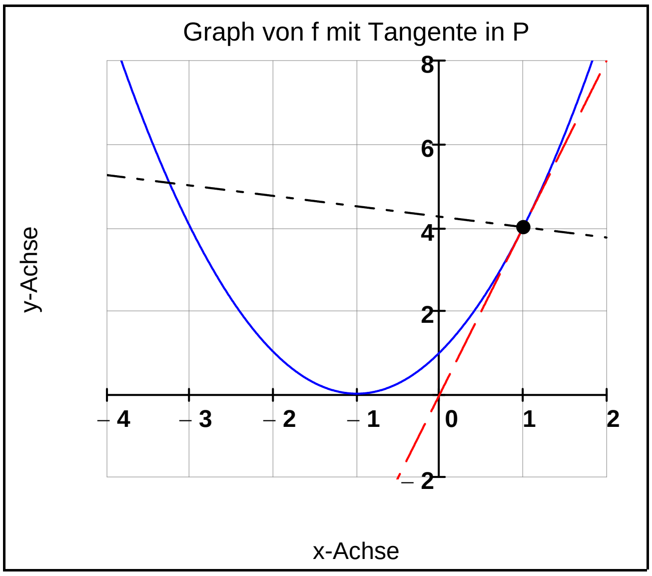
Funktionswert: $\mathbf{y_0 := f(x_0) \;=\; 4}$

Steigung: $\mathbf{m_t := f'(x_0) \;=\; 4}$

Tangente: $\mathbf{t(x) := f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)}$ $\quad$ $\mathbf{t(x) \;=\; 4 \cdot x}$

Steigung der Normale: $\mathbf{m_n := \frac{-1}{f'(x_0)} \;=\; -\frac{1}{4}}$

Normale: $\mathbf{n(x) := \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)}$ $\quad$ $\mathbf{n(x) \;=\; \frac{17}{4} - \frac{x}{4}}$



Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) := x^3$ und $x \in IR$.
a) Zeichen Sie den Graphen der Funktion f mithilfe geeigneter Werte.
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente mit der Steigung $m = \frac{4}{3}$
c) Tragen Sie den Graphen der Tagente in das Diagramm von a) ein.
d) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen in P und tragen Sie den Graph von n ein.

Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx}f(x) = 3 \cdot x^2$

Es wird ein belibiger Punkt P(u/v) auf dem Graphen von f gewählt. $x_0(u) := u$

Funktionswert: $y_0(u) := f(x_0(u)) = u^3$

Steigung: $m_t(u) := f'(x_0(u)) = 3 \cdot u^2$

Tangente soll eine vorgegebene Steigung haben:

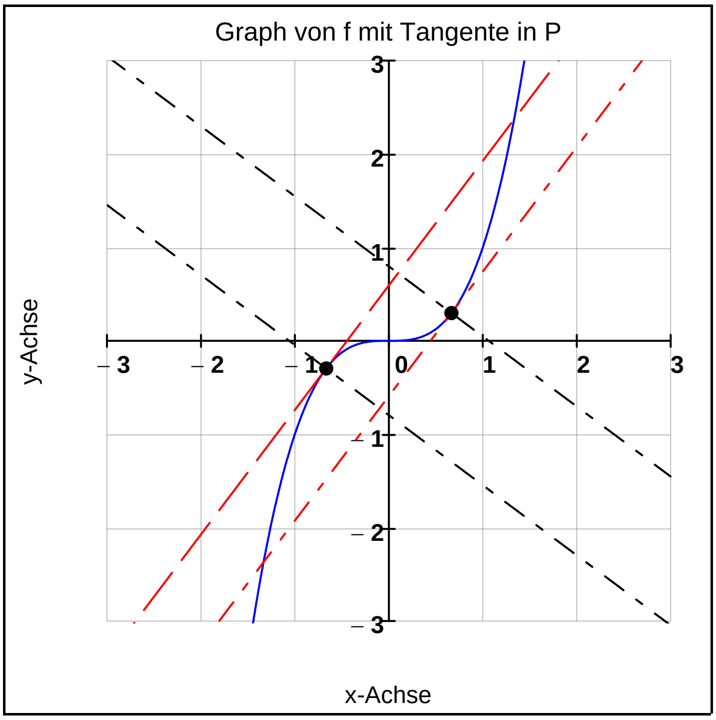
$$m_t(u) = \frac{4}{3} \rightarrow 3 \cdot u^2 = \frac{4}{3} \text{ auflösen}, u \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Tangente: $t_1(x) = \frac{4 \cdot x}{3} + \frac{16}{27}$ $\quad t_2(x) = \frac{4 \cdot x}{3} - \frac{16}{27}$

Steigungen der Normalen: $m_{n1} := \frac{-1}{f'(x_1)} = -\frac{3}{4}$ $\quad m_{n2} := \frac{-1}{f'(x_2)}$

Normalen: $n_1(x) := \frac{-1}{f'(x_1)} \cdot (x - x_1) + f(x_1)$ $\qquad n_1(x) = -\frac{3 \cdot x}{4} - \frac{43}{54}$

$n_2(x) := \frac{-1}{f'(x_2)} \cdot (x - x_2) + f(x_2)$ $\qquad n_2(x) = \frac{43}{54} - \frac{3 \cdot x}{4}$



Beispiel 3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) := \frac{-1}{4} \cdot x^2$ und $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeichen Sie den Graphen der Funktion f mithilfe geeigneter Werte.
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente durch den Punkt **Q(0/2)**, wobei Q nicht auf dem Graphen von f liegt.
c) Tragen Sie den Graphen der Tagente in das Diagramm von a) ein.
d) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen in P und tragen Sie den Graph von n ein.

Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) = -\frac{x}{2}$

Es wird ein belibiger Punkt P(u/v) auf dem Graphen von f gewählt. $x_0(u) := u$

Funktionswert: $y_0(u) := f(x_0(u)) = -\frac{u^2}{4}$

Steigung: $m_t(u) := f'(x_0(u)) = -\frac{u}{2}$

Tangente: $t(x,u) := f'(x_0(u))\cdot(x - x_0(u)) + f(x_0(u))$ $\qquad t(x,u) = \dfrac{u\cdot(u-x)}{2} - \dfrac{u^2}{4}$

Das ist eine Geradenschar: $t(x,u) = \dfrac{u^2}{4} - \dfrac{u\cdot x}{2}$

Aus dieser Geradenschar wird diejenige Tangente ausgewählt, die durch den Punkt Q verläuft.

$Q \in G_{t:}$ $\qquad t(0,u) = 2 \rightarrow \dfrac{u^2}{4} = 2 \text{ auflösen}, u \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot\sqrt{2} \\ -2\cdot\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Abrufen der Lösungen: $u_1 = -2\cdot\sqrt{2}$ $\qquad u_2 = 2\cdot\sqrt{2}$

Tangentengleichungen: $t_1(x) = \sqrt{2}\cdot x + 2$ $\qquad t_2(x) = 2 - \sqrt{2}\cdot x$

Steigungen der Normalen: $m_{n1} := \dfrac{-1}{f'(x_1)} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad m_{n2} := \dfrac{-1}{f'(x_2)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Normalen: $n_1(x) := \dfrac{-1}{f'(x_1)}\cdot(x - x_1) + f(x_1)$ $\qquad n_2(x) := \dfrac{-1}{f'(x_2)}\cdot(x - x_2) + f(x_2)$

$n_1(x) = -\dfrac{\sqrt{2}\cdot(x + 2\cdot\sqrt{2})}{2} - 2$ $\qquad n_2(x) = \dfrac{\sqrt{2}\cdot(x - 2\cdot\sqrt{2})}{2} - 2$