Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2002
Mathematik 12 Technik - A II - Lösung

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = \dfrac{e^{2\cdot x} - 4}{e^{2\cdot x} + 4}$ in der Definitionsmenge $ID = IR$.

Teilaufgabe 1.1 (8 BE)
Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion f und untersuchen Sie das Verhalten f der Funktionswerte für $|x| \to \infty$. Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an.

Funktionsterm: $f(x) := \dfrac{e^{2\cdot x} - 4}{e^{2\cdot x} + 4}$

Nullstellen: $e^{2\cdot x} - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x} = 2$ oder $e^{x} = -2$ nicht definiert

$\Leftrightarrow \quad x = \ln(2)$ $\quad$ **NS(ln(2) / 0)**

Grenzwerte:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\overset{\overset{-4}{\uparrow}}{e^{2\cdot x} - 4}}{\underset{\underset{4}{\downarrow}}{e^{2\cdot x} + 4}} \to -1 \quad \Rightarrow$$

Horizontale Aymptote $y = -1$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{e^{2\cdot x} - 4}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{e^{2\cdot x} + 4}} \right) \overset{\text{l.H.}}{=} \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2\cdot e^{2\cdot x}}{2\cdot e^{2\cdot x}} \right) = 1 \quad \Rightarrow$$

Horizontale Aymptote $y = 1$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f.

[Mögliches Zwischenergebnis: $f'(x) = \dfrac{16 \cdot e^{2 \cdot x}}{\left(e^{2 \cdot x} + 4\right)^2}$]

1. Ableitung: $f'(x) := \dfrac{d}{dx} f(x)$ vereinfachen $\rightarrow \dfrac{16 \cdot e^{2 \cdot x}}{\left(e^{2 \cdot x} + 4\right)^2}$

Zähler: $e^{2 \cdot x} > 0$ für alle x ∈ IR

Nenner: $\left(e^{2 \cdot x} + 4\right)^2 > 0$ für alle x ∈ IR

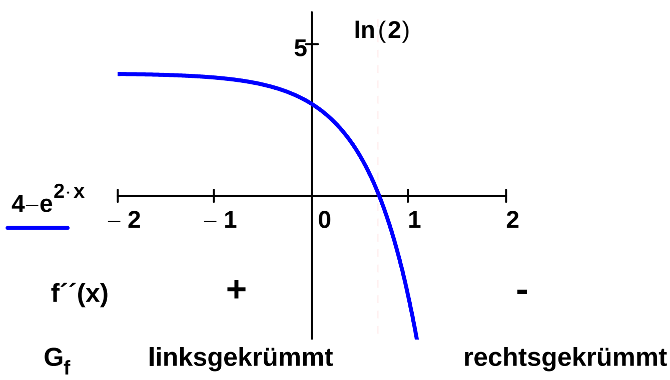
Bruchterm positiv ⇒ **G_f streng monoton steigend in IR**

Teilaufgabe 1.3 (9 BE)
Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f und geben Sie die Koordinaten des Wendepunktes an. Bestimmen Sie auch die Gleichung der Wendetangente.

2. Ableitung: $f''(x) := \dfrac{d}{dx} f'(x) = -\dfrac{32 \cdot e^{2 \cdot x} \cdot \left(e^{2 \cdot x} - 4\right)}{\left(e^{2 \cdot x} + 4\right)^3}$

Das Vorzeichen von $f''(x)$ wird durch das Vorzeichen von $\left(4 - e^{2 \cdot x}\right)$ bestimmt.

Vorzeichenwechsel an der Nullstelle des Terms: $4 - e^{2 \cdot x} = 0 \Rightarrow x_0 = \ln(2)$ (siehe 1.1)



⇒ Wendepunkt: WP(ln(2) / 0)

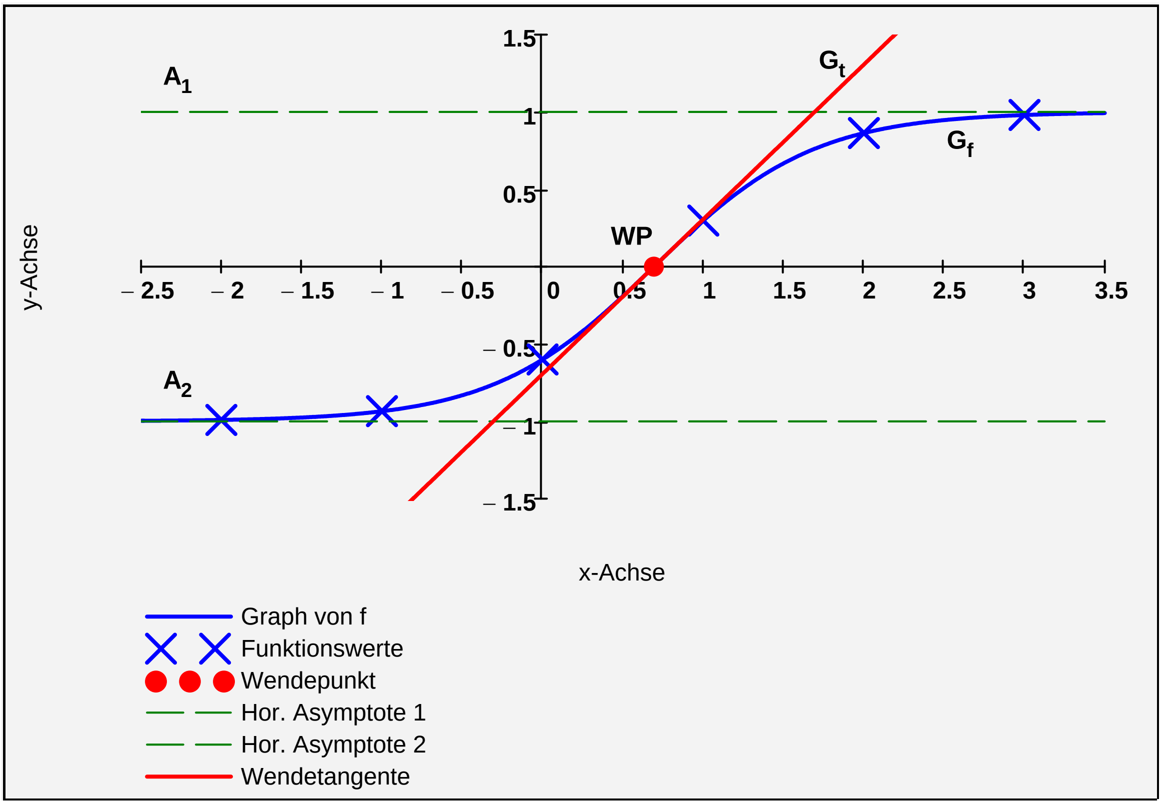
Steigung der Tangente im Wendepunkt: $m := f'(\ln(2)) \rightarrow 1$

Wendetangente: $t(x) := f'(\ln(2)) \cdot (x - \ln(2)) \rightarrow x - \ln(2)$

Teilaufgabe 1.4 (6 BE)
Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion f, die Asymptoten und die Wendetangente für $-2 \le x \le 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

Wertetabelle $= \begin{pmatrix} \text{"x"} & -2.00 & -1.00 & 0.00 & 1.00 & 2.00 & 3.00 \\ \text{"y"} & -0.99 & -0.93 & -0.60 & 0.30 & 0.86 & 0.98 \end{pmatrix}$

Bisherige Ergebnisse:	Nullstelle = Wendepunkt	**WP (ln(2) / 0)**
	Wendetangente:	$t(x) \rightarrow x - \ln(2)$
	Horizontale Asymptote 1:	**y = 1**
	Horizontale Asymptote 2:	**y = –1**



Teilaufgabe 1.5.0
Gegeben ist zusätzlich die Funktion $\mathbf{g(x) = a \cdot \cos(b \cdot x) + c}$ mit den Koeffizenten
$\mathbf{a, b, c \in IR \setminus \{0\}}$ in der Definitionsmenge $\mathbf{D = IR}$.

Teilaufgabe 1.5.1 **(6 BE)**
Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c so, dass der Graph der Funktion g durch den Punkt P(0/4) verläuft und im Punkt W(1/2) der Wendepunkt mit dem kleinsten positiven x-Wert vorliegt.

[Ergebnis: $\mathbf{a = 2, b = \frac{\pi}{2}, c = 2}$]

$$g(x, a, b, c) := a \cdot \cos(b \cdot x) + c$$

$$g'(x, a, b, c) := \frac{d}{dx} g(x, a, b, c) \rightarrow -a \cdot b \cdot \sin(b \cdot x)$$

$$g''(x, a, b, c) := \frac{d}{dx} g'(x, a, b, c) \rightarrow -a \cdot b^2 \cdot \cos(b \cdot x)$$

$P \in G_g$: $\quad g(0, a, b, c) = 4 \rightarrow a + c = 4 \quad$ Gleichung 1

$W \in G_g$: $\quad g(1, a, b, c) = 2 \rightarrow c + a \cdot \cos(b) = 2 \quad$ Gleichung 2

Wendepunkt: $\quad g''(1, a, b, c) = 0 \rightarrow -a \cdot b^2 \cdot \cos(b) = 0 \quad$ Gleichung 3

$\Leftrightarrow \quad \cos(b) = 0 \qquad b = \frac{\pi}{2} \cdot (2 \cdot k + 1)$

kleinster positiver Wert: $\quad k = 0 \qquad b := \frac{\pi}{2}$

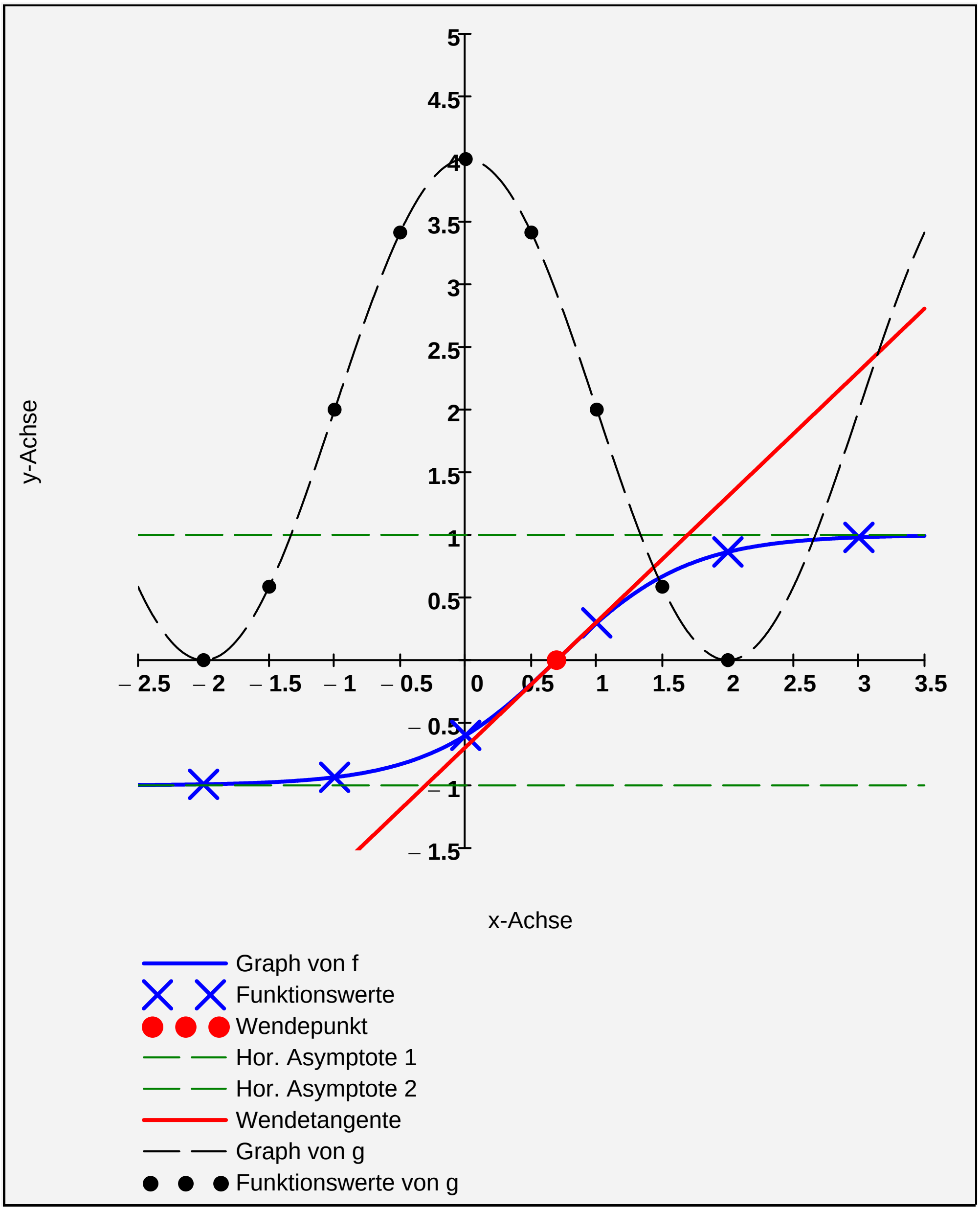
Gleichung 2: $\quad c = 2$

Gleichung 1: $\quad a := 2$

Teilaufgabe 1.5.2 (5 BE)
Zeichnen Sie den Graphen von g mithilfe geeigneter Funktionswerte für $-2 \le x \le 2$ in das Koordinatensystem aus Aufgabe 1.4.

$$g(x) := 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + 2$$

$$\text{Werte} \rightarrow \begin{pmatrix} \text{"x"} & -2.0 & -1.0 & -1.0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 1.0 & 1.0 & 2.0 \\ \text{"y"} & 0 & 0.6 & 2.0 & 3.0 & 4.0 & 3.0 & 2.0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$



Teilaufgabe 1.5.3 (5 BE)
Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Flächenstücks, das der Graph von g zusammen mit der x-Achse im Bereich $-2 \le x \le 2$ begrenzt.

Stammfunktion: $$\int 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right) + 2\,dx = \frac{4}{\pi}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right) + 2\cdot x$$

Flächenmaßzahl: $$A = 2\cdot\int_0^2 g(x)\,dx = 2\cdot\left(\frac{4}{\pi}\cdot\sin(\pi) + 2\cdot 2\right) = 8$$

Teilaufgabe 1.6 (7 BE)
Die Graphen der Funktionen f und g schneiden sich im ersten Quadranten. Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren einen Näherungswert für den x-Wert dieses Schnittpunkts. Wählen Sie einen geeigneten Startwert, führen Sie zwei Näherungsschtritte durch und geben Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen gerundet an.

Schnittpunkt: $f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - g(x) = 0$

Differenzfunktion:

$d(x) := f(x) - g(x)$ $$d(x) = \frac{e^{2\cdot x} - 4}{e^{2\cdot x} + 4} - 2\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot x}{2}\right) - 2$$

Ableitung:

$d'(x) := \frac{d}{dx}d(x)$ $$d'(x) = \frac{2\cdot e^{2\cdot x}}{e^{2\cdot x} + 4} + \pi\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot x}{2}\right) - \frac{2\cdot e^{2\cdot x}\cdot\left(e^{2\cdot x} - 4\right)}{\left(e^{2\cdot x} + 4\right)^2}$$

Startwert: $x_0 := 1$

1 . Näherung: $x_1 := x_0 - \frac{d(x_0)}{d'(x_0)}$ $\quad x_1 = 1.42004$

2 . Näherung: $x_2 := x_1 - \frac{d(x_1)}{d'(x_1)}$ $\quad x_2 = 1.469$ gerundet: $x_2 = 1.47$