Aufgaben zur Integralrechnung 1
Übungsblatt

Theorie und Musterbeispiele

1. Funktionen $f(x) = x^n$ mit $n \in IN$.

$$F(x) = \int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

Beispiel: $f(x) = x^5$; $\quad F(x) = \frac{1}{6} \cdot x^6 + c$

2. Funktionen $f(x) = (a \cdot x + b)^n$ mit $n \in IN$.

$$F(x) = \int (a \cdot x + b)^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{a} \cdot (a \cdot x + b)^{n+1} + c$$

Beispiel: $f(x) = (2 \cdot x + 1)^5$; $\quad F(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot x + 1)^6 + c = \frac{1}{12} \cdot (2 \cdot x + 1)^6 + c$

Beispiel: $f(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot x + 1\right)^5$; $\quad F(x) = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x + 1\right)^6 + c = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x + 1\right)^6 + c$

3. Funktionen $f(x) = x^{-n}$ mit $n \in IN \setminus \{1\}$.

$$F(x) = \int x^{-n} \, dx = \frac{1}{-n+1} \cdot x^{-n+1} + c = \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + c$$

Beispiel: $f(x) = (2 \cdot x + 1)^{-5}$; $\quad F(x) = \frac{1}{-5+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot x + 1)^{-5+1} + c = \frac{-1}{8} \cdot \frac{1}{(2 \cdot x + 1)^4} + c$

Beispiel: $f(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot x + 1\right)^{-5}$; $\quad F(x) = \frac{1}{-5+1} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x + 1\right)^{-5+1} + c = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \cdot x + 1\right)^4} + c$

4. Funktionen $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$.

$$F(x) = \int x^{-1} \, dx = \ln(|x|) + c$$

5. Funktionen $f(x) = \dfrac{1}{a\cdot x+b} = (a\cdot x+b)^{-1}$.

$$F(x) = \int (a\cdot x+b)^{-1}\,dx = \frac{1}{a}\cdot \ln(|a\cdot x+b|) + c$$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{1}{2\cdot x+1} = (2\cdot x+1)^{-1}$; $F(x) = \displaystyle\int (2\cdot x+1)^{-1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot \ln(|2\cdot x+1|) + c$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\cdot x+1} = \left(\frac{1}{2}\cdot x+1\right)^{-1}$; $F(x) = \displaystyle\int \left(\frac{1}{2}\cdot x+1\right)^{-1}dx = 2\cdot \ln\left(\left|\frac{1}{2}\cdot x+1\right|\right) + c$

6. Funktionen $f(x) = \dfrac{1}{(a\cdot x+b)^n} = (a\cdot x+b)^{-n}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

$$F(x) = \int (a\cdot x+b)^{-n}\,dx = \frac{1}{-n+1}\cdot\frac{1}{a}\cdot(a\cdot x+b)^{-n+1} + c = \frac{-1}{n-1}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(a\cdot x+b)^{n-1}} + c$$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{1}{(2\cdot x+1)^5} = (2\cdot x+1)^{-5}$;

$$F(x) = \int (2\cdot x+1)^{-5}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2\cdot x+1)^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{-1}{8}\cdot\frac{1}{(2\cdot x+1)^4} + c$$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\cdot x+1\right)^5} = \left(\frac{1}{2}\cdot x+1\right)^{-5}$;

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{2}\cdot x+1\right)^{-5}dx = 2\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot x+1\right)^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\cdot x+1\right)^4} + c$$

7. Funktionen $f(x) = \dfrac{a\cdot x^2+b\cdot x+c}{x} = a\cdot x+b+\dfrac{c}{x}$.

$$F(x) = \int \left(a\cdot x+b+\frac{c}{x}\right)dx = a\cdot\frac{x^2}{2} + b\cdot x + c\cdot \ln(|x|) + k$$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{4\cdot x^2+2\cdot x+3}{x} = 4\cdot x+2+\dfrac{3}{x}$; $F(x) = 4\cdot\dfrac{x^2}{2} + 2\cdot x + 3\cdot\ln(|x|) + c$

8. **Funktionen** $f(x) = \frac{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}{x^2} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$.

$$F(x) = \int \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right) dx = a \cdot x + b \cdot \ln(|x|) + c \cdot \frac{-1}{x} + k$$

Beispiel: $f(x) = \frac{4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3}{x^2} = 4 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$;

$$F(x) = 4 \cdot x + 2 \cdot \ln(|x|) + 3 \cdot \frac{-1}{x} + c$$

9. **Funktionen** $f(x) = \frac{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}{x - 1} = a + b + a \cdot x + \frac{a + b + c}{x - 1}$

$$F(x) = \int \left(a + b + a \cdot x + \frac{a + b + c}{x - 1} \right) dx = (a + b) \cdot x + a \cdot \frac{x^2}{2} + (a + b + c) \cdot \ln(|x - 1|) + k$$

Beispiel: $f(x) = \frac{4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3}{x - 1} = 4 \cdot x + 6 + \frac{9}{x - 1}$;

$$F(x) = 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 6 \cdot x + 9 \cdot \ln(|x - 1|) + c$$

Beispiel: $f(x) = \frac{4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3}{2 \cdot x - 1} = 2 \cdot x + 2 + \frac{5}{2 \cdot x - 1}$;

$$F(x) = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 2 \cdot x + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(|2 \cdot x - 1|) + c$$

Beispiel: $f(x) = \frac{4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3}{\frac{1}{2} \cdot x - 1} = 8 \cdot x + 20 + \frac{23}{\frac{1}{2} x - 1}$;

$$F(x) = 8 \cdot \frac{x^2}{2} + 20 \cdot x + 23 \cdot 2 \cdot \ln\left(\left| \frac{1}{2} \cdot x - 1 \right| \right) + c$$

.

Aufgabe 1

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^2 (x-1)^5\,dx$ b) $\displaystyle\int \left(2-\frac{3}{x^2}\right) dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2}{x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{2+3\cdot x^2}{x^4}\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{x^3-3}{x^2}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^5}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x^3-4}{2\cdot x+1}\,dx$ h) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}\cdot\pi} \sin(x)\,dx$ i) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\cdot\pi} \cos(x)+1\,dx$

Teilaufgabe 1a)

Funktion: $f_1(x) = (x-1)^5$

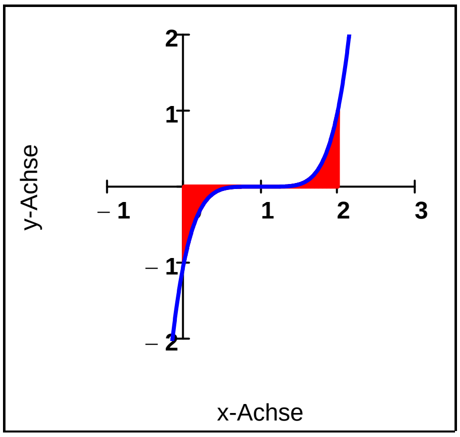
Stammfunktion: $F_1(x,c) := \frac{1}{6}\cdot(x-1)^6 + c$

Integral: $I_1 := \displaystyle\int_0^2 (x-1)^5\,dx = 0$

Fläche unter dem Graphen

Es wurde über eine Nullstelle mit VZW hinweg-integriert, die beiden Flächen haben die gleiche Flächenmaßzahl.

Graphische Interpretation



Teilaufgabe 1b)

Funktion: $f(x) = \left(2-\frac{3}{x^2}\right)$

Integral: $F(x) = \displaystyle\int \left(2-\frac{3}{x^2}\right) dx = 2\cdot x + \frac{3}{x} + c$

Teilaufgabe 1c)

Funktion: $f(x) = \frac{x^3+x^2+2}{x^2} = x + 1 + \frac{2}{x^2}$

Integral: $F(x) = \displaystyle\int \left(x+1+\frac{2}{x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x} + c$

Teilaufgabe 1d)

Funktion: $$f(x) = \frac{2 + 3 \cdot x^2}{x^4} = \frac{2}{x^4} + \frac{3}{x^2} = 2 \cdot x^{-4} + 3 \cdot x^{-2}$$

Integral: $$F(x) = \frac{2}{-4+1} \cdot x^{-4+1} + \frac{3}{-2+1} \cdot x^{-2+1} + c = \frac{-2}{3} \cdot \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x} + c$$

Teilaufgabe 1e)

Funktion: $$f(x) = \frac{x^3 - 3}{x^2} = x - \frac{3}{x^2}$$

Integral: $$F(x) = \frac{x^2}{2} - 3 \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{x} + c$$

Teilaufgabe 1f)

Funktion: $$f(x) = \frac{1}{(x-1)^5} = (x-1)^{-5}$$

Integral: $$F(x) = \frac{(x-1)^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^4} + c$$

Teilaufgabe 1g)

Funktion: $$f(x) = \frac{x^3 - 4}{2 \cdot x + 1} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{8} - \frac{33}{8 \cdot (2 \cdot x + 1)}$$

Integral:

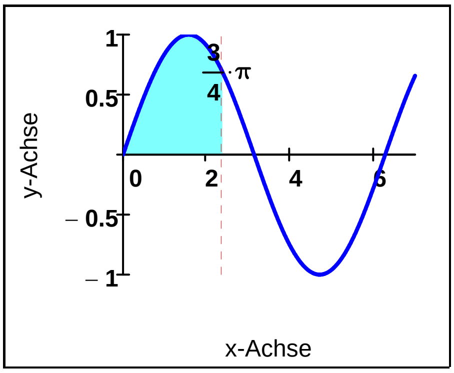
$$F(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{8} \cdot x - \frac{33}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(|2 \cdot x + 1|) + c = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{8} \cdot x - \frac{33}{16} \cdot \ln(|2 \cdot x + 1|) + c$$

Teilaufgabe 1h)

Funktion: $f(x) := \sin(x)$ Integral: $F(x) = -\cos(x)$

$$\int_0^{\frac{3}{4} \cdot \pi} \sin(x)\,dx = -\cos\left(\frac{3}{4} \cdot \pi\right) + \cos(0) = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 1.707$$

$$x1 := 0, 0.01 .. \frac{3}{4} \cdot \pi$$



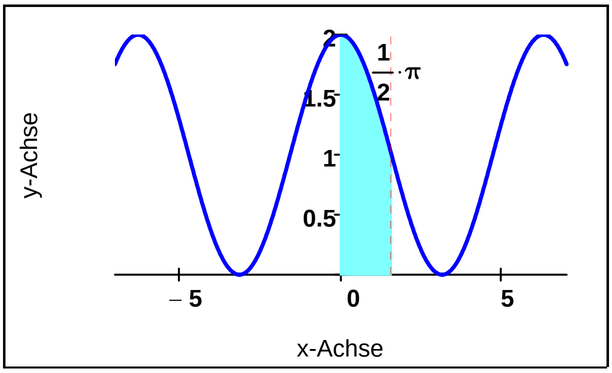
$$\int_0^{\frac{3}{4} \cdot \pi} \sin(x)\, dx = 1.707$$

Teilaufgabe i)

Funktion: $f(x) := \cos(x) + 1$ Integral: $F(x) = \sin(x) + x$

$$\int_0^{\frac{1}{2} \cdot \pi} (\cos(x) + 1)\, dx = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi\right) + \frac{1}{2} \cdot \pi - (\sin(0) + 0) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \pi = 2.571$$

$$x1 := 0, 0.01 .. \frac{1}{2} \cdot \pi$$



$$\int_0^{\frac{1}{2} \cdot \pi} (\cos(x) + 1)\, dx = 2.571$$

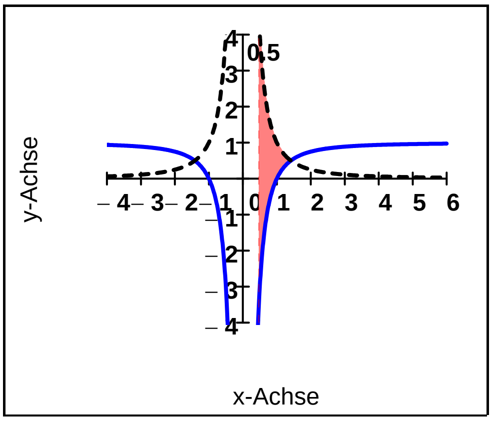
Aufgabe 2

Gegeben sind die Funktionen $f(x) := \frac{x^2-1}{x^2}$ und $g(x) := \frac{1}{x^2}$ mit ihren Graphen G_f und G_g.

a) Berechnen Sie die Fläche, die von den Graphen G_f und G_g und der Geraden $x = 0.5$ begrenzt wird.

b) Gegeben sind die Geraden $x = a$ und $x = 2 \cdot a$ mit $a > 2$. Sie begrenzen mit den Graphen G_f und G_g eine Fläche in Abhängigkeit von a. Berechnen Sie den Parameter a so, dass die Fläche $2 \cdot \sqrt{3}$ FE beträgt.

Teilaufgabe a)



Berechnung des Schnittpunktes:

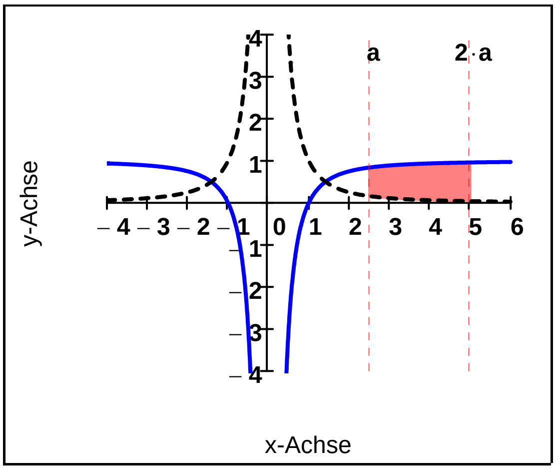
$$\frac{x^2-1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 2 \text{ auflösen} \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Zerlegung: $\frac{x^2-1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{2}{x^2}$

Stammfunktion: $F(x) := \int \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) dx = x + \frac{2}{x}$

Fläche: $A_1 := \left| \int_{0.5}^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) dx \right|$ $\quad A_1 = 1.672$



$A_2(a) := F(2 \cdot a) - F(a)$

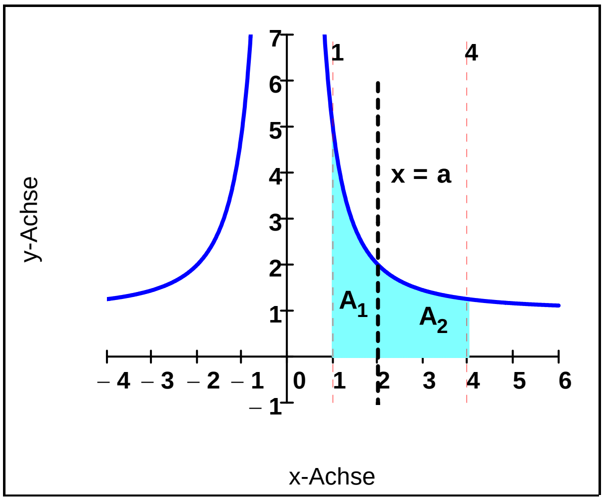
$A_2(a) \rightarrow a - \frac{1}{a}$

Bedingung: $a - \frac{1}{a} = 2 \cdot \sqrt{3}$ auflösen $\rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 \\ \sqrt{3}-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.732 \\ -0.268 \end{pmatrix}$ keine Lösung / Lösung

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion $f(x) := \frac{x^2+4}{x^2}$ und ihr Graph G_f. Die Fläche unter dem Graphen G_f und zwischen den Geraden $x = 1$ und $x = 4$ wird durch die Gerade $x = a$ mit $1 < a < 4$ aufgeteilt.
Wählen Sie a so, dass
a) beide Flächen gleich groß sind,
b) die Flächen sich im Verhältnis **3:4** teilen.

Teilaufgabe a)



Zerlegung: $\frac{x^2+4}{x^2} = 1 + \frac{4}{x^2}$

Stammfunktion:

$$F(x) := \int \left(1 + \frac{4}{x^2}\right) dx \rightarrow x - \frac{4}{x}$$

1. Teilfläche: $$A_1(a) := \int_1^a \left(1 + \frac{4}{x^2}\right) dx \rightarrow \frac{(a-1)\cdot(a+4)}{a}$$

2. Teilfläche: $$A_2(a) := \int_a^4 \left(1 + \frac{4}{x^2}\right) dx \text{ annehmen}, 1 < a < 4 \rightarrow \frac{4}{a} - a + 3$$

$$A_1(a) = A_2(a) \rightarrow \frac{(a-1)\cdot(a+4)}{a} = \frac{4}{a} - a + 3 \text{ auflösen } \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$ Lösung / keine Lösung

$$\frac{A_1(a)}{A_2(a)} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{(a-1)\cdot(a+4)}{a\cdot\left(\frac{4}{a} - a + 3\right)} = \frac{3}{4} \text{ auflösen } \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{793}}{14} - \frac{3}{14} \\ -\frac{\sqrt{793}}{14} - \frac{3}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.797 \\ -2.226 \end{pmatrix}$$ Lösung / keine Lösung

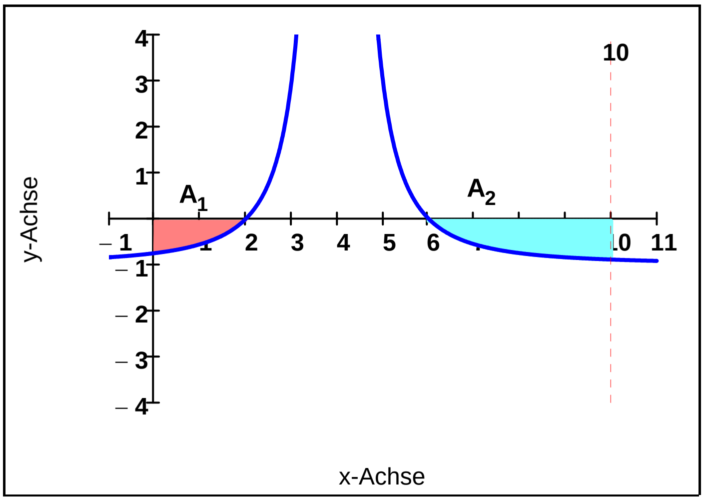
Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion $f(x) := \frac{4}{(x-4)^2} - 1$ und ihr Graph G_f.

a) Berechnen Sie die Fläche, die vom Graphen G_f und den beiden Koordinatenachsen eingeschlossen wird.

b) Die Geraden $x = 10$ und $y = 0$ und der Graph G_f schließen eine Fläche ein.Berechnen Sie diese Fläche.

Teilaufgabe a)



Nullstellen:

$$\frac{4}{(x-4)^2} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x-4)^2 = 4 \text{ auflösen } \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Stammfunktion: $$F(x) := \int \left[\frac{4}{(x-4)^2} - 1\right] dx = -x - \frac{4}{x-4}$$

1. Teilfläche: $$A_1 := \left| \int_0^2 \left[\frac{4}{(x-4)^2} - 1\right] dx \right| \qquad \boxed{A_1 = 1}$$

2. Teilfläche: $$A_2 := \left| \int_6^{10} \left[\frac{4}{(x-4)^2} - 1\right] dx \right| \qquad \boxed{A_2 = 2.667}$$