Aufgaben zur Integralrechnung 2

- Teilaufgaben aus Abschlussprüfungen zu gebrochenrationaln Funktionen

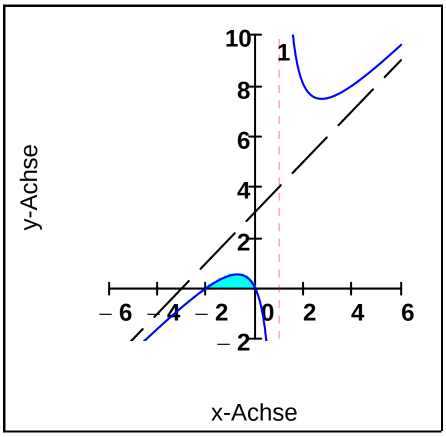
Aufgabe 1

$f(x,a) := \dfrac{x^2 + 2\cdot x + a^2 - 3}{x - 1}$

Polynomdivision mit Rest: $f(x,a) := x + 3 + \dfrac{a^2}{(x-1)}$

Nullstellen: $f(x,a) = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{4 - a^2} - 1 \\ -\sqrt{4 - a^2} - 1 \end{pmatrix}$

existieren für $-2 \le a \le 2$



Stammfunktion von zerlegtem Term:

$$\int \left[x + 3 + \frac{a^2}{(x-1)}\right] dx \rightarrow 3\cdot x + \frac{x^2}{2} + a^2\cdot \ln(x-1)$$

Flächenberechnung:

$$A := \int_{-2}^{0} f\left(x, \sqrt{3}\right) dx \rightarrow 4 - \ln(27) \qquad A = 0.7042$$

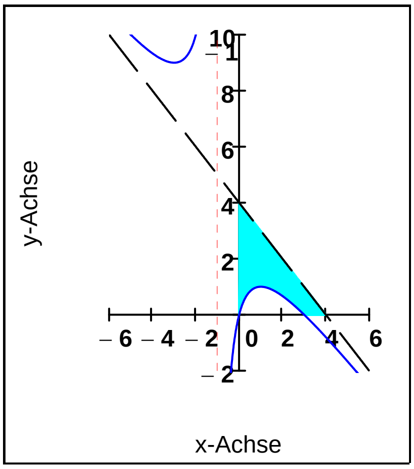
Aufgabe 2

$f(x,a) := \dfrac{-x^2 + (a-1)\cdot x}{x+1}$

Polynomdivision mit Rest: $f(x,a) := -x + a - \dfrac{a}{(x+1)}$

Nullstellen: $f(x,a) = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ a - 1 \end{pmatrix}$

Schiefe Asymptote: $g(x,a) := -x + a$



Dreiecksfläche minus Fläche unter dem Graphen:

$$A := \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 - \int_{0}^{3} f(x,4)\, dx \qquad A = 6.045$$

Stammfunktion von zerlegtem Term:

$$\int \left[-x + 4 - \frac{4}{(x+1)}\right] dx \rightarrow 4\cdot x - 4\cdot \ln(x+1) - \frac{x^2}{2}$$

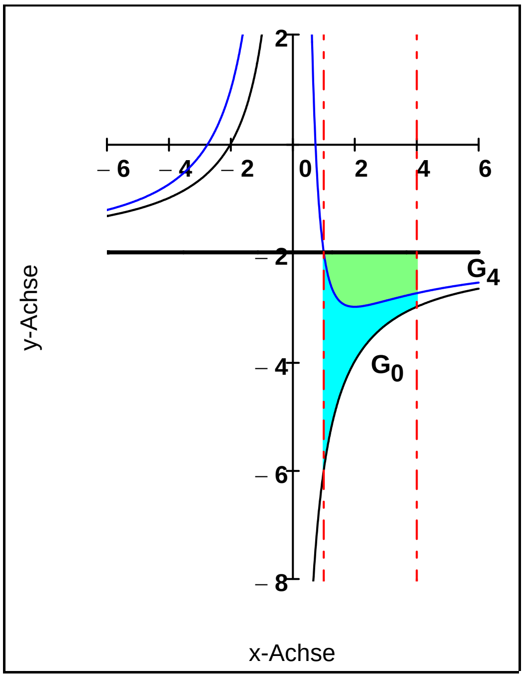
Aufgabe 3

$$f(x,a) := \frac{-2\cdot x^2 - 2\cdot x + a}{x^2}$$

Division: $f(x,a) := -2 - \frac{4}{x} + \frac{a}{x^2}$

Nullstellen: $f(x,a) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a+2}}{2} - 1 \\ -\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a+2}}{2} - 1 \end{pmatrix}$ existieren für $a \geq -2$

Begrenzende Geraden: $y_0 := -2$ $x_1 := 1$ $x_2 := 4$



Stammfunktion von 1. Differenz:

$$\int \left(\frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}\right) dx = 4\cdot\ln(x) + \frac{4}{x}$$

1. Teilfläche: $A_1 := \int_1^4 \left(y_0 - f(x,4)\right) dx$

$$A_1 = \ln(256) - 3 = 2.545$$

Stammfunktion von 2. Differenz:

$$\int \frac{4}{x^2}\, dx = -\frac{4}{x}$$

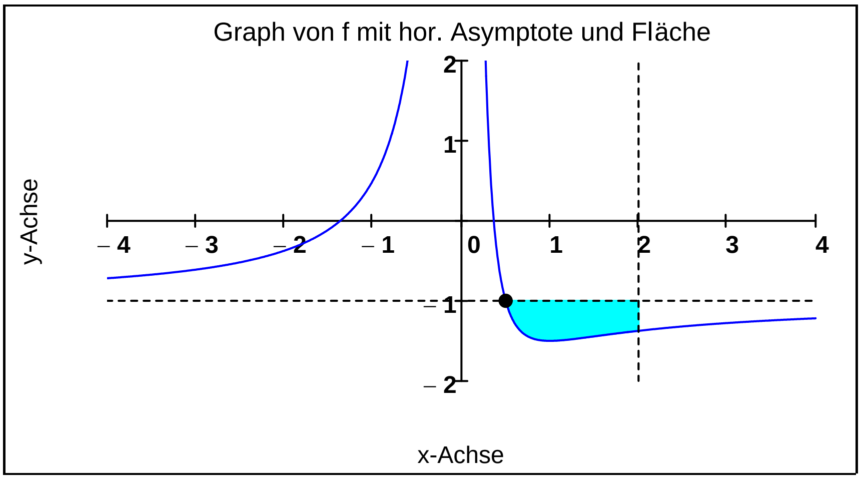
2. Teilfläche: $A_2 := \int_1^4 (f(x,4) - f(x,0))\, dx$ $A_2 = 3$

Aufgabe 4

$f(x) := \frac{-2\cdot x^2 - 2x + 1}{2\cdot x^2}$ Division $f(x) := -1 + \frac{1}{2\cdot x^2} - \frac{1}{x}$

horizontale Asymptote: $y_0 := -1$

Schnittpunkt mit der horizontalen Asymptote: $-1 = -1 + \frac{1}{2\cdot x^2} - \frac{1}{x}$ auflösen, $x \rightarrow \frac{1}{2}$



Stammfunktion: $F(x) := \int \left(\frac{1}{2\cdot x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = -\ln(x) - \frac{1}{2\cdot x}$

Flächenberechnung: $A := \left| \int_{\frac{1}{2}}^{2} (-1 - f(x))\, dx \right| = \ln(4) - \frac{3}{4}$ $A = 0.636$

Aufgabe 5

$f(x,a) := \dfrac{x^2 + 4\cdot x + a}{x - 1}$ Division: $f(x,a) := x + 5 + \dfrac{a+5}{(x-1)}$

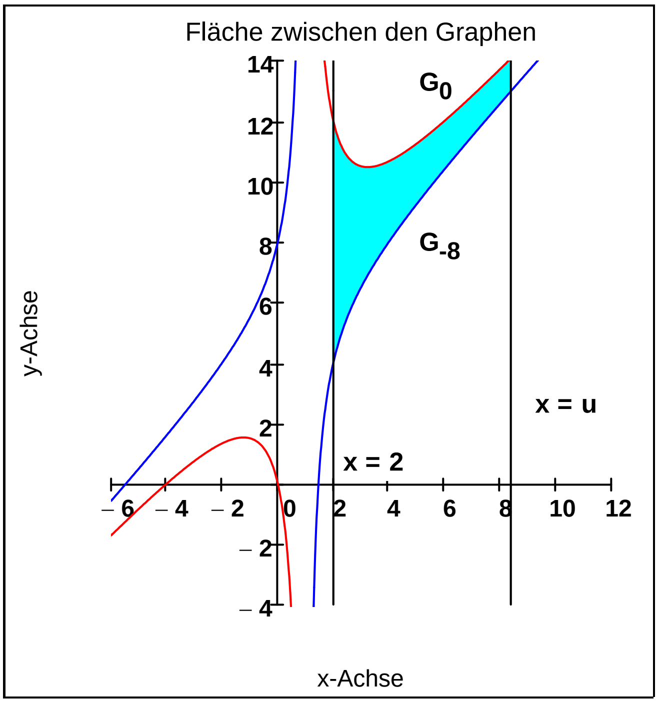
Nullstellen: $f(x,a) = 0 \text{ auflösen}, x \;\rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{4-a} - 2 \\ -\sqrt{4-a} - 2 \end{pmatrix}$ existieren für $a \le 4 \wedge a \ne -5$

Begrenzende Geraden: $y_0 := -2$ $x_1 = 2$ $x_2 = u$

Differenz: $f(x,0) - f(x,-8) = \dfrac{8}{x-1}$ Stammfunktion: $\displaystyle\int \left[\frac{8}{(x-1)}\right] dx = 8\cdot\ln(x-1)$

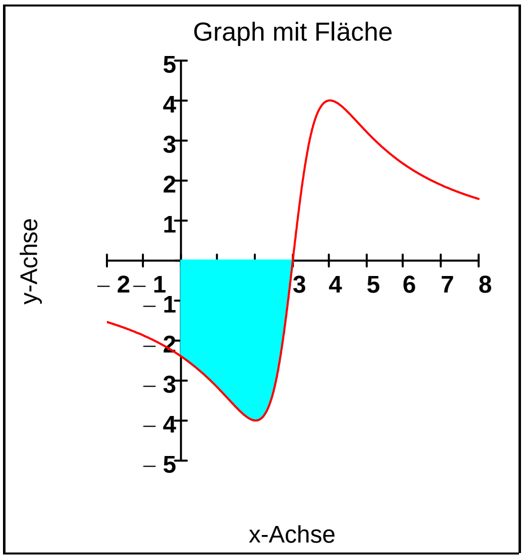
Flächenberechnung: $A(u) := \displaystyle\int_2^u (f(x,0) - f(x,-8))\, dx = 8\cdot\ln(u-1)$

Bedingung für Flächenmaßzahl: $A(u) = 16 \rightarrow 8\cdot\ln(u-1) = 16 \text{ auflösen}, u \;\rightarrow e^2 + 1$



Aufgabe 6

$$f(x) := 8 \cdot \frac{x-3}{x^2 - 6 \cdot x + 10}$$



Stammfunktion über Substitution FS Seite 67/E:
Ableitung des Nenners steht im Zähler.

$$\int \left(8 \cdot \frac{x-3}{x^2 - 6 \cdot x + 10}\right) dx = 4 \cdot \ln\left(x^2 - 6 \cdot x + 10\right)$$

Flächenberechnung:

$$A := \left| \int_0^3 f(x)\, dx \right| = \ln(10000)$$

$$A = 9.21$$

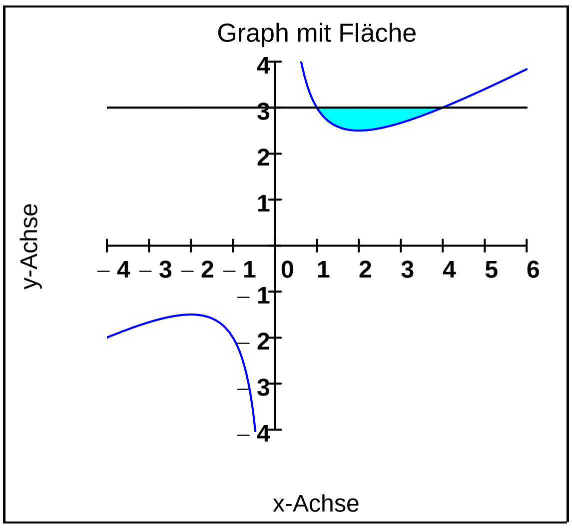
Aufgabe 7

$$f(x) := \frac{x^2 + x + 4}{2 \cdot x}$$

Division: $f(x) := \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} + \frac{2}{x}$

Horizontale Gerade: $y_0 := 3$

Schnittpunkt Funktion - Gerade: $\frac{x^2 + x + 4}{2 \cdot x} = 3$ **auflösen**, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$



Stammfunktion:

$$\int \left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} + \frac{2}{x}\right) dx = \frac{x}{2} + 2 \cdot \ln(x) + \frac{x^2}{4}$$

Flächenberechnung:

$$A := \int_1^4 (3 - f(x))\, dx = \frac{15}{4} - \ln(16)$$

$$A = 0.977$$

Aufgabe 8

$$f(x,a) := \frac{2\cdot x}{x^2 + a}$$

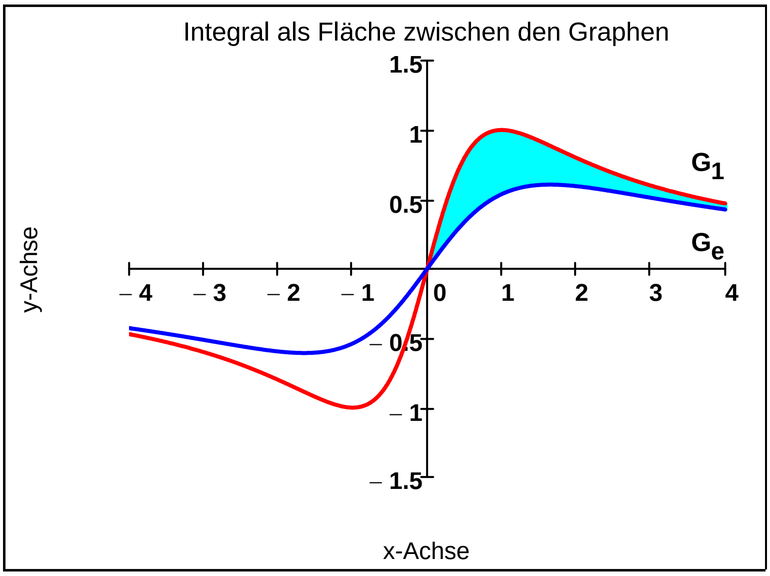
Stammfunktion über Substitution FS Seite 67/E:
Ableitung des Nenners steht im Zähler.

Stammfunktionen:

$$\int \frac{2\cdot x}{x^2+1}\,dx = \ln\left(x^2+1\right) \qquad \int \frac{2\cdot x}{x^2+e}\,dx = \ln\left(x^2+e\right)$$

$$I(u) := \int_0^u (f(x,1) - f(x,e))\,dx = \ln\left(u^2+1\right) - \ln\left(u^2+e\right) + 1$$

$$\lim_{u\to\infty} I(u) \to 1$$



Integral I(u) ist im Intervall [0;u] die **Fläche zwischen den Grafen** G_1 und G_e.
Die beiden Grafen schneiden sich **nur** in (0/0), dennoch ist der Grenzwert für u ---> ∞ ein endlicher Wert, nämlich 1.

Aufgabe 9

$$f(x) := 20 \cdot \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

Stammfunktion: $F(x,a,b) := \frac{a}{(x+1)} + b \cdot \ln(x+1)$

Ableitung der Stammfunktion: $F_x(x,a,b) := \frac{d}{dx}F(x,a,b) = \frac{b}{x+1} - \frac{a}{(x+1)^2}$

auf einen Bruchstrich bringen: $\frac{-a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)}$ vereinfacht auf $\frac{(-a + b \cdot x + b)}{(x+1)^2}$

Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem:

Vorgabe $b = 20$ $b - a = -20$ $\text{Suchen}(a,b) \rightarrow \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix}$

also: $a := 20$ $b := 40$

Flächenberechnung: $A := \int_1^{10} f(x)\,dx = 20 \cdot \ln(11) - 20 \cdot \ln(2) - \frac{180}{11}$ $A = 17.731$