Wiederholung zur Schulaufgabe

Aufgabe 1 (Berufliche Oberschule 12 Nichttechnik, aus der AP 1999, AI)

Gegeben ist der Funktionsterm f einer ganzrationalen Funktion mit
$f(x) = a x^4 + b x^3 + c x + 4$.
Der Graph von f besitzt im Punkt P(2/0) einen Wendepunkt.
Die Tangente an diesen Graphen an der Stelle $x_0 = 0$ hat die Steigung $m = -4$.

a) Bestimmen Sie den Funktionsterm f(x) der Funktion f.

Zwischenergebnis: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x + 4$

b) Ermitteln Sie Art und Koordinaten sämtlicher Wendepunkte des Graphen von f.

c) Bestimmen Sie mithilfe einer Monotonietabelle die maximalen Intervalle, in denen die Funktion echt monoton zu- bzw. abnimmt sowie die Wertemenge W_f der Funktion f.

d) Zeichnen Sie den Graphen von f für $-2 \le x \le 3$. Verwenden Sie dazu die bisherigen Ergebnisse und berechnen Sie zusätzlich die Funktionswerte f(-2), f(1) und f(3).

Aufgabe 2 (Berufliche Oberschule 12 Nichttechnik, aus der AP 2002, AII)

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k(x) = -\frac{1}{4}\cdot\left(x^3 + k x^2 - 2k x - 8\right)$ mit $k \in \mathrm{IR}$.

a) Zeigen Sie, dass $x_1 = 2$ für alle Werte von k eine Nullstelle von f_k ist und zerlegen Sie damit den Term $f_k(x)$ in ein Produkt mit genau einem Linearfaktor.

Mögliches Teilergebnis: $f_k(x) = -\frac{1}{4}\cdot\left(x^2 + k x + 2x + 4\right)\cdot\left(x - 2\right)$

b) Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Funktion f_k neben $x_1 = 2$ noch mindestens eine weitere Nullstelle besitzt. Achten Sie dabei auch auf die Sonderfälle $k = -6$ und $k = 2$.

c) Berechnen Sie nun k so, dass die Funktion f_k bei $x_2 = -2$ eine doppelte Nullstelle hat.

Im Folgenden gelte **k = 2**.

d) Berechnen Sie Art und Koordinaten sämtlicher relativer Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen von f_2.

e) Zeichnen Sie den Graphen von f_2 für $-4 \le x \le 2{,}5$ .Verwenden Sie dazu die bisherigen Ergebnisse und berechnen Sie zusätzlich die Funktionswerte f_2(-4), f_2(0) und f_2(2,5).

f) Der Graph von f_2 besitzt zwei Tangenten t_1 und t_2, die parallel zur Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten verlaufen. Die Berührpunkte dieser Tangenten mit dem Graphen von f_2 heißen B_1 und B_2. Der weiter rechts liegende Berührpunkt wird mit B_1 bezeichnet.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte B_1 und B_2 sowie die Gleichung der Tangente t_1.

Aufgabe 3

Gegeben ist das folgende Gleichungssystem in Abhängigkeit von $a \in IR \setminus \{0\}$.

$$\begin{array}{llcccccc}
(1) & x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & a \\
(2) & 3x_1 & + & 5x_2 & + & (a+1)x_3 & = & a \\
(3) & x_1 & + & 3x_2 & + & a^2 x_3 & = & 2a+1
\end{array}$$

a) Diagonalisieren Sie das Gleichungssystem mithilfe des Gauß-Algorithmus und geben Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit von a an.

b) Bestimmen für a = - 1 bzw. a = 0 jeweils die Lösungsmenge.

Aufgabe 4

Gegeben ist das folgende Gleichungssystem in Abhängigkeit von $a \in IR \setminus \{0\}$.

$$\begin{array}{llcccccc}
(1) & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\
(2) & 3x_1 & + & & & 2x_3 & = & 3 \\
(3) & 2x_1 & - & x_2 & + & a^2 x_3 & = & a
\end{array}$$

a) Diagonalisieren Sie das Gleichungssystem mithilfe des Gauß-Algorithmus und geben Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit von a an.

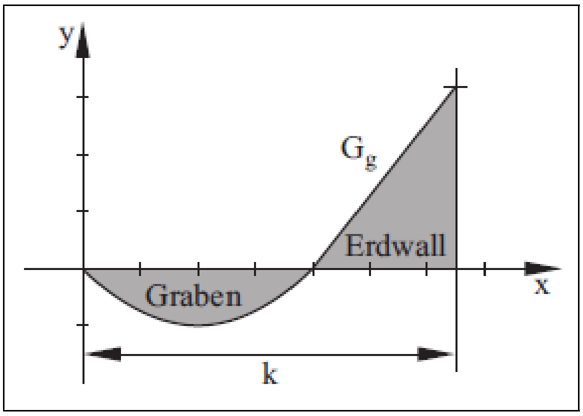
b) Bestimmen für a = 1 bzw. a = 0 jeweils die Lösungsmenge.

Aufgabe 5 (Berufliche Oberschule 12 Nichttechnik, aus der AP 2004, AII)

Die nebenstehende Skizze zeigt den Querschnitt durch einen ausgehobenen Graben und einen aufgeschütteten Erdwall.
Der Graph von g ist der Graph der abschnittsweise definierten Funktion

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - x & \text{für} \quad 0 \le x \le 4 \\ x - 4 & \text{für} \quad 4 < x \le k \end{cases}$$

für $k \in IR \quad \wedge \quad k > 4$.



a) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Übergang vom Graben zum Erdwall stetig und „ohne Knick“ verläuft.

b) Stellen Sie die Maßzahl der Querschnittsfläche A(k) des Erdwalls in Abhängigkeit von k dar.

c) Der Aushub, der bei der Erstellung des Grabens anfällt, soll vollständig als Erdwall ver wendet werden. Berechnen Sie k so, dass die Querschnittsfläche des Erdwalls genau so groß ist wie die Querschnittsfläche des Grabens, nämlich $\frac{8}{3}$ Flächeneinheiten.