Aufgaben zur Wiederholung für die Schulaufgabe

Aufgabe 1 (Berufliche Oberschule 12 Nichttechnik , aus der AP 1999/AI)

Gegeben ist der Funktionsterm f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x + 4$ einer ganzrationalen Funktion. Der Graph von f besitzt im Punkt P(2/0) einen Wendepunkt. Die Tangente an diesen Graphen an der Stelle $x_0 = 0$ hat die Steigung $m = -4$.

a) Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$ der Funktion f.

Zwischenergebnis: $f(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^4 + x^3 - 4 \cdot x + 4$

b) Ermitteln Sie Art und Koordinaten sämtlicher Wendepunkte des Graphen von f.
c) Bestimmen Sie mithilfe einer Monotonietabelle die maximalen Intervalle, in denen die Funktion echt monoton zu- bzw. abnimmt sowie die Wertemenge W_f der Funktion f.
d) Zeichnen Sie den Graphen von f für $-2 \le x \le 3$. Verwenden Sie dazu die bisherigen Ergebnisse und berechnen Sie zusätzlich die Funktionswerte $f(-2)$, $f(1)$ und $f(3)$.
Maßstab: x-Achse: $1 \cdot LE = 2 \cdot cm$; y-Achse: $1 \cdot LE = 1 \cdot cm$.

Teilaufgabe a)

Funktionsterm: $f(x, a, b, c) := a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x + 4$

1. Ableitung: $f'(x, a, b, c) := \frac{d}{dx} f(x, a, b, c) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + c$

2. Ableitung: $f''(x, a, b, c) := \frac{d}{dx} f'(x, a, b, c) = 12 \cdot a \cdot x^2 + 6 \cdot b \cdot x$

W(2/0) $\in G_f$: $f(2, a, b, c) = 0 \rightarrow 16 \cdot a + 8 \cdot b + 2 \cdot c + 4 = 0$

Wendepunkt: $f''(2, a, b, c) = 0 \rightarrow 48 \cdot a + 12 \cdot b = 0$

Tangentensteigung : $f'(0, a, b, c) = -4 \rightarrow c = -4$

Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 16 \cdot a + 8 \cdot b + 2 \cdot c + 4 = 0 \\ 48 \cdot a + 12 \cdot b = 0 \\ c = -4 \end{pmatrix} \text{auflösen}, a, b, c \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Auslesen der Lösungen: $a_1 = -\frac{1}{4}$ $\qquad b_1 = 1$ $\qquad c_1 = -4$

$$f(x) := f(x, a_1, b_1, c_1) = \frac{-x^4}{4} + x^3 + 4 \cdot (-x) + 4$$

Teilaufgabe b)

Feste Definition: $f(x) := \frac{-x^4}{4} + x^3 - 4 \cdot x + 4$

1. Ableitung: $f'(x) := -x^3 + 3 \cdot x^2 - 4$

2. Ableitung: $f''(x) := -3 \cdot x^2 + 6 \cdot x$

Wendepunktsbedingung: $f''(x) = 0 \rightarrow 6 \cdot x - 3 \cdot x^2 = 0$

$$6 \cdot x - 3 \cdot x^2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Wendepunkt:

$x_{W1} := 0$ $\qquad f(x_{W1}) = 4$ $\qquad f'(x_{W1}) = -4$ $\qquad$ normaler Wendepunkt $\qquad$ $WP(0, 4)$

2. Wendepunkt:

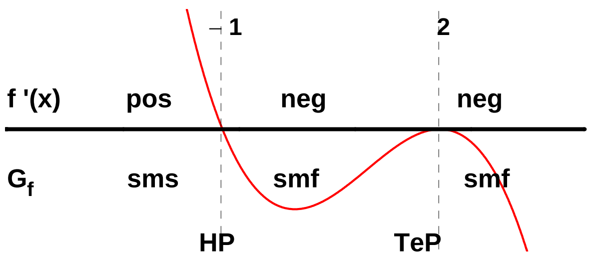
$x_{W2} := 2$ $\qquad f(x_{W2}) = 0$ $\qquad f'(x_{W2}) = 0$ $\qquad$ Wendepunkt mit hor. Tangente, also Terrassenpunkt $\qquad$ $TeP(2, 0)$

Teilaufgabe c)

Horizontale Tangenten: $f'(x) = 0 \rightarrow 3 \cdot x^2 - x^3 - 4 = 0$

$f'(-1) = 0$ $\qquad$ Polynomdivision: $\frac{3 \cdot x^2 - x^3 - 4}{x + 1}$ parfrac $\rightarrow 4 \cdot x - x^2 - 4$

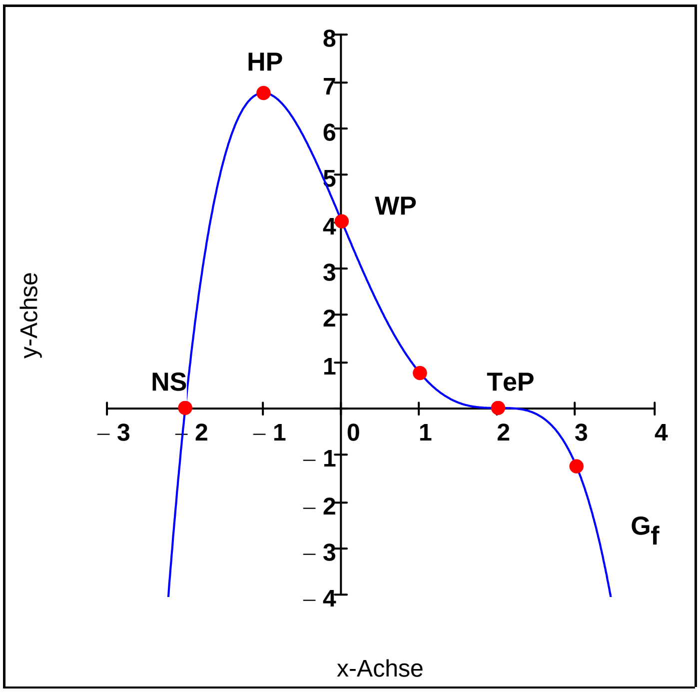
Weitere Lösungen: $4 \cdot x - x^2 - 4 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad f(-1) = 6.75$



Absolutes Maximum: $HP(-1, 6.75)$

G_f ist streng monoton steigend in $]-\infty; -1]$ und G_f ist streng monoton fallend in $]-1; \infty[$.

Wertemenge: $W =]-\infty; 6.75]$



$x0^T =$	$f(x0^T) =$
-2.5	-11.4
-2	0.0
-1	6.8
0	4.0
1	0.8
2	0.0
3	-1.3

Aufgabe 2 (Berufliche Oberschule 12 Nichttechnik , aus der AP 2002/AII)

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k(x) = -\frac{1}{4}\cdot\left(x^3 + k\cdot x^2 - 2\cdot k\cdot x - 8\right)$ mit k $\in$ IR.

a) Zeigen Sie, dass $x_1 = 2$ für alle Werte von k eine Nullstelle von f_k ist und zerlegen Sie damit den Term $f_k(x)$ in ein Produkt mit genau einem Linearfaktor.

Mögliches Teilergebnis: $f_k(x) = -\frac{1}{4}\cdot\left(x^2 + k\cdot x + 2\cdot x + 4\right)\cdot(x - 2)$

b) Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Funktion f_k neben $x_1 = 2$ noch mindestens eine weitere Nullstelle besitzt. Achten Sie dabei auch auf die Sonderfälle $k = -6$ und $k = 2$.

c) Berechnen Sie nun k so, dass die Funktion f_k bei $x_2 = -2$ eine doppelte Nullstelle hat.

Im Folgenden gelte $k = 2$

d) Berechnen Sie Art und Koordinaten sämtlicher relativer Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen von f_2.

e) Zeichnen Sie den Graphen von f_2 für $-4 \le x \le 2.5$. Verwenden Sie dazu die bisherigen Ergebnisse und berechnen Sie zusätzlich die Funktionswerte $f_2(-4)$, $f_2(0)$ und $f_2(2.5)$.

Maßstab auf beiden Achsen: $1\cdot LE = 1\cdot cm$

f) Der Graph von f_2 besitzt zwei Tangenten t_1 und t_2, die parallel zur Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten verlaufen. Die Berührpunkte dieser Tangenten mit dem Graphen von f_2 heißen B_1 und B_2. Der weiter rechts liegende Berührpunkt wird mit B_1 bezeichnet. Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte B_1 und B_2 sowie die Gleichung der Tangente t_1.

Teilaufgabe a)

Funktionsterm: $f(x,k) := -\frac{1}{4}\cdot\left(x^3 + k\cdot x^2 - 2\cdot k\cdot x - 8\right)$

Nullstell einsetzen: $f(0,k) = -\frac{1}{4}\cdot\left(2^3 + k\cdot 4 - 2\cdot k\cdot 2 - 8\right) = 0$

Polynomdivision: $\frac{x^3 + k\cdot x^2 - 2\cdot k\cdot x - 8}{x-2}$ ergibt $x^2 + (k+2)\cdot x + 4$

Faktorisierter Funktionsterm: $f_k(x) = -\frac{1}{4}\cdot\left[x^2 + (k+2)\cdot x + 4\right]\cdot(x-2)$

Teilaufgabe b)

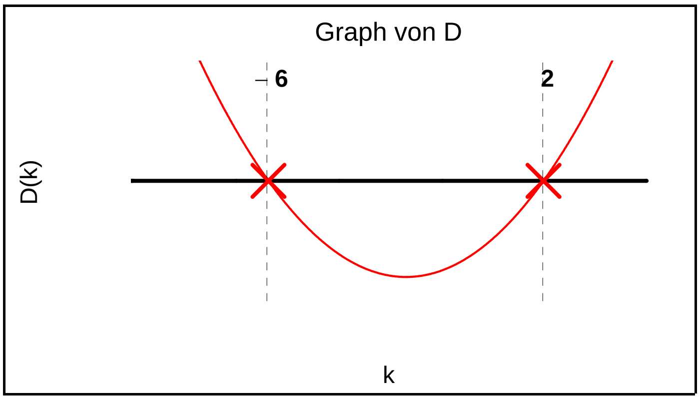
Restterm nach der Polynomdivision: $p(x,k) := x^2 + (k+2)\cdot x + 4$

$p(x,k) = 0 \rightarrow x^2 + (k+2)\cdot x + 4 = 0$

$$x_{12} = \frac{-(k+2)}{2} \pm \frac{\sqrt{(k+2)^2 - 4\cdot 4}}{2} = \frac{-(k+2)}{2} \pm \frac{\sqrt{k^2 + 4\cdot k - 12}}{2}$$

Mindestens eine Lösung: $D(k) := k^2 + 4\cdot k - 12$

$D(k) = 0 \rightarrow k^2 + 4\cdot k - 12 = 0 \text{ auflösen}, k \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$



Es gibt mindestens noch eine Lösung für $k \le -6 \vee k \ge 2$, d. h. die Funktion f hat neben x = 2 dann mindestens noch eine weitere Nullstelle.

Teilaufgabe c)

$p(x,k) = 0 \rightarrow x^2 + (k+2)\cdot x + 4 = 0$

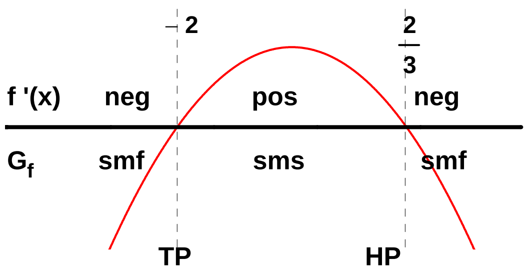
$p(-2,k) = 0 \rightarrow 4 - 2\cdot k = 0$ auflösen, $k \rightarrow 2$ $\Rightarrow$ $k = 2$

Teilaufgabe d)

Feste Definition: $f(x) := -\frac{1}{4}\cdot\left(x^3 + 2\cdot x^2 - 4\cdot x - 8\right)$

1. Ableitung: $f'(x) := -\frac{1}{4}\cdot\left(3\cdot x^2 + 4\cdot x - 4\right)$

Horizontale Tangenten: $f'(x) = 0 \rightarrow 1 - x - \frac{3\cdot x^2}{4} = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$



G_f ist streng monoton fallend in $]\,-\infty\,;\,-2\,]$ und
G_f ist streng monoton steigend in $[\,-2\,;\,\frac{2}{3}\,]$ und
G_f ist streng monoton fallend in $[\,\frac{2}{3}\,;\,\infty\,[$.

$f(-2) = 0$ relativer Hochpunkt: $HP(-2, 0)$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{64}{27}$ relativer Tiefpunkt. $TP\left(\frac{2}{3}, \frac{64}{27}\right)$

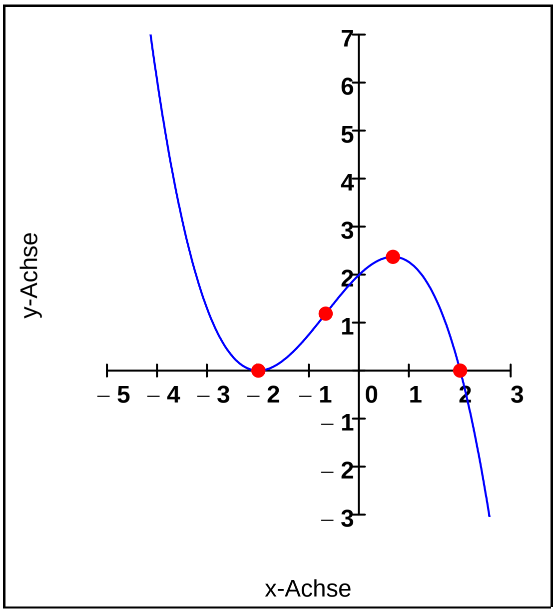
2. Ableitung: $f''(x) := -\frac{1}{4}\cdot(6\cdot x + 4)$

Wendepunktsbedingung: $f''(x) = 0 \rightarrow -\frac{3\cdot x}{2} - 1 = 0$ auflösen, $x \rightarrow -\frac{2}{3}$

$x_W := -\frac{2}{3}$ Nullstelle mit Vorzeichenwechsel

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{27}$ Wendepunkt: $WP\left(-\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)$

Teilaufgabe e)



$f(-4) = 6$

$f(2.5) = -2.5$

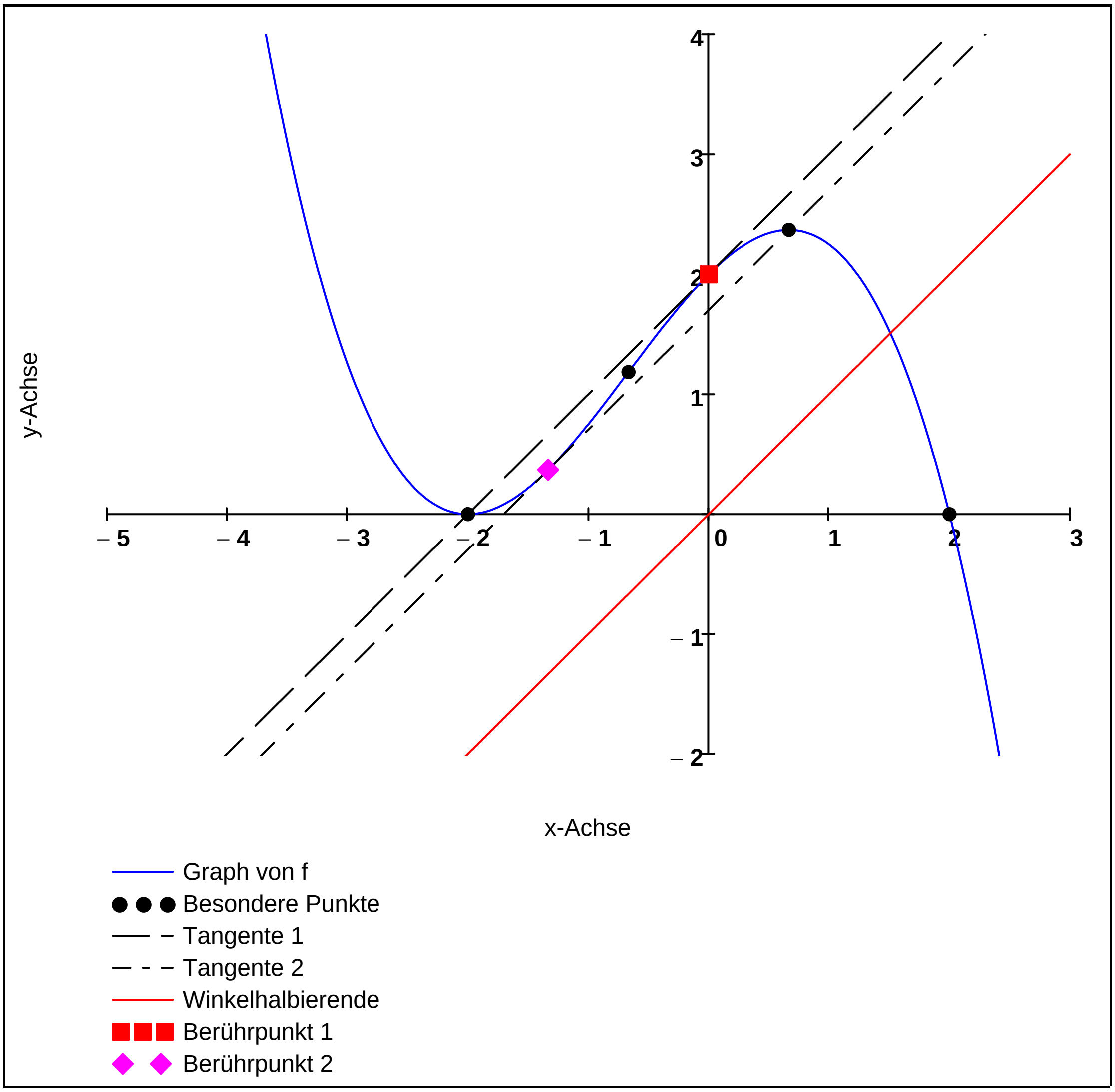
Teilaufgabe f)

Steigung der Winkelhalbierenden: $m := 1$

$$f'(x) = 1 \rightarrow 1 - x - \frac{3 \cdot x^2}{4} = 1 \text{ auflösen } \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$x_{b1} := 0 \qquad y_{b1} := f(x_{b1}) = 2 \qquad \Rightarrow \qquad B_1(0, 2) \qquad t_1(x) := x + 2$

$x_{b2} := -\frac{4}{3} \qquad y_{b2} := f(x_{b2}) = \frac{10}{27} \qquad \Rightarrow \qquad B_2\left(-\frac{4}{3}, \frac{10}{27}\right) \qquad t_2(x) := x + \frac{4}{3} + \frac{10}{27}$


y-Achse
x-Achse
4
3
2
1
– 1
– 2
– 5
– 4
– 3
– 2
– 1
0
1
2
3
Graph von f
Besondere Punkte
Tangente 1
Tangente 2
Winkelhalbierende
Berührpunkt 1
Berührpunkt 2

Aufgabe 3

Gegeben ist das folgende Gleichungssystem in Abhängigkeit von $\mathbf{a} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(1) $x_1 + 3 \cdot x_2 + x_3 = a$

(2) $x_1 + 5 \cdot x_2 + (a+1) \cdot x_3 = a$

(3) $x_1 + 3 \cdot x_2 + a^2 \cdot x_3 = 2 \cdot a + 1$

a) Diagonalisieren Sie das Gleichungssystem mithilfe des Gauß-Algorithmus und geben Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit von a an.

b) Bestimmen für a = 1 bzw. a = 0 jeweils die Lösungsmenge.

Teilaufgabe a)

Definition der Koeffizientenmatrix:

$$A(a) := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & a+1 \\ 1 & 3 & a^2 \end{pmatrix}$$

Spaltenvektor des inhomogenen Systems:

$$v(a) := \begin{pmatrix} a \\ a \\ 2 \cdot a + 1 \end{pmatrix}$$

Systemmatrix.

$$A_{erw}(a) := \mathbf{erweitern}(A(a), v(a)) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & a \\ 1 & 5 & a+1 & a \\ 1 & 3 & a^2 & 2 \cdot a + 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & a \\ 1 & 5 & a+1 & a \\ 1 & 3 & a^2 & 2 \cdot a + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(III)} - \text{(I)}]{\text{(II)} - \text{(I)}} D(a) := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Nebenrechnungen:

$$a^2 - 1 = 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a + 1 = 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow -1$$

$a = -1$ $\quad D(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gutartige Nullzeile $\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

$a = 1$ $\quad D(1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ bösartige Nullzeile $\Rightarrow$ keine Lösungen

$a \neq 1 \wedge a \neq -1$ genau eine Lösung

Teilaufgabe b)

Für $\mathbf{a} = -1$ unendlich viele Lösungen mit einem freien Parameter.

Wählen Sie: $x3(\lambda) := \lambda$

$x2(\lambda) = \frac{\lambda}{2}$ $\quad$ $x1(\lambda) = -\frac{5\cdot\lambda}{2} - 1$

Lösungsvektor:
$$\begin{pmatrix} x1(\lambda) \\ x2(\lambda) \\ x3(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5\cdot\lambda}{2} - 1 \\ \frac{\lambda}{2} \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$D(1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad rg(D(1)) = 3 \qquad \Rightarrow$$ Keine Lösungen.

Für $\mathbf{a} = 0$ genau eine Lösung:

$$D(0) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad zref(D(0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$x_3 := -1 \qquad x_2 := 0 \qquad x_1 := 1$

Lösungsvektor:
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Gegeben ist das folgende Gleichungssystem in Abhängigkeit von $\mathbf{a} \in \mathbf{IR} \setminus \{0\}$.

(1) $x_1 + x_2 + x_3 = 2$

(2) $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_3 = 3$

(3) $2 \cdot x_1 - x_2 + a^2 \cdot x_3 = a$

a) Diagonalisieren Sie das Gleichungssystem mithilfe des Gauß-Algorithmus und geben Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit von a an.
b) Bestimmen für a = 1 bzw. a = 0 jeweils die Lösungsmenge.

Teilaufgabe a)

Definition der Koeffizientenmatrix:

$$A(a) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a^2 \end{pmatrix}$$

Spaltenvektor des inhomogenen Systems:

$$v(a) := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$$

Systemmatrix.

$$A_{erw}(a) := \text{erweitern}(A(a), v(a)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & a^2 & a \end{pmatrix}$$

Diagonalisieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & a^2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[(III) - 2\cdot(I)]{(II) - 3\cdot(I)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & a^2 - 2 & a - 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(III) + (II)]{(-1)\cdot(II)} D(a) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & a - 1 \end{pmatrix}$$

Nebenrechnungen:

$$a^2 - 1 = 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a - 1 = 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow 1$$

$a = 1$ $\quad D(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gutartige Nullzeile $\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

$\mathbf{a = -1}$ $\quad D(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ bösartige Nullzeile $\Rightarrow$ keine Lösungen

$\mathbf{a \neq 1 \wedge a \neq -1}$ genau eine Lösung

Teilaufgabe b)

Für $\mathbf{a = 1}$ unendlich viele Lösungen mit einem freien Parameter.

Wählen Sie: $x3(\lambda) := \lambda$

$x2(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{3}$ $\quad x1(\lambda) = 1 - \frac{2\cdot\lambda}{3}$

Lösungsvektor: $\begin{pmatrix} x1(\lambda) \\ x2(\lambda) \\ x3(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\cdot\lambda}{3} \\ 1 - \frac{\lambda}{3} \\ \lambda \end{pmatrix}$

Für $\mathbf{a = 0}$ genau eine Lösung:

$D(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{zref}(D(0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$x_3 := 1$ $\quad x_2 := \frac{2}{3}$ $\quad x_1 := \frac{1}{3}$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 (Berufliche Oberschule 12 Nichttechnik , aus der AP 2004/AII)
Die nebenstehende Skizze zeigt den Querschnitt durch einen ausgehobenen Graben und einen aufgeschütteten Erdwall. Der Graph G_g ist der Graph der abschnittsweise definierten Funktion

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\cdot x^2 - x & \text{if } 0 \le x \le 4 \\ (x-4) & \text{if } 4 < x \le k \end{cases}$$

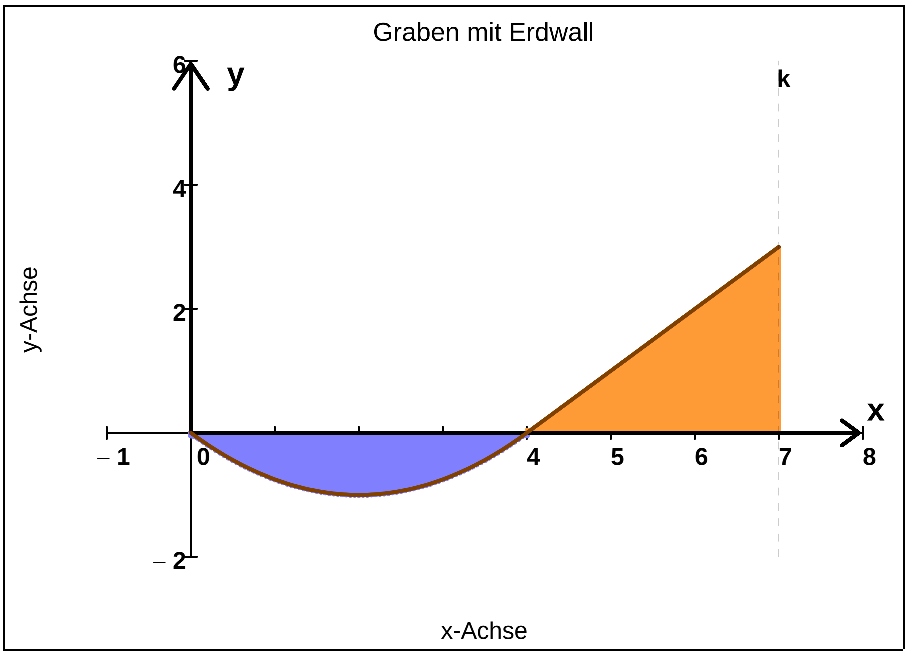
mit $k \in IR \wedge k > 4$.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Übergang vom Graben zum Erdwall stetig und "ohne Knick" verläuft.
b) Stellen Sie die Maßzahl der Querschnittsfläche A(k) des Erdwalls in Abhängigkeit von k dar.
c) Der Aushub, der bei der Erstellung des Grabens anfällt, soll vollständig als Erdwall verwendet werden. Berechnen Sie k so, dass die Querschnittsfläche des Erdwalls genauso groß ist wie die Querschnittsfläche des Grabens, nämlich $\frac{8}{3}$ Flächeneinheiten.

Teilaufgabe a)

Wählen Sie: $c := 6$ Werte zwischen 0 und 8. Bei einer Animation c = 0 setzen

$k = 7$



Teilaufgabe b)

Stetigkeit:

linker Grenzwert: $\lim_{x \to 4^-} \left(\frac{1}{4}\cdot x^2 - x\right) \to 0$

stimmen überein

rechter Grenzwert: $\lim_{x \to 4^+} (x-4) \to 0$

Funktionswert: $g(4,k) = 0$

ohne Knick entspricht der Differenzierbarkeit:

Ableitung: $$g'(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\cdot x - 1\right) & \text{if } 0 < x < 4 \\ 1 & \text{if } 4 < x < k \end{cases}$$

linker Grenzwert: $$\lim_{x \to 4^-} \left(\frac{1}{2}\cdot x - 1\right) \to 1$$

stimmen überein

rechter Grenzwert: $$\lim_{x \to 4^+} (1) \to 1$$

Teilaufgabe b)

Querschnittsfläche des Erdwalls = Dreiecksfläche:

$$A(k) := \left[\frac{1}{2}\cdot(k-4)\cdot(k-4)\right]$$ erweitert auf $$A(k) := \frac{1}{2}\cdot k^2 - 4\cdot k + 8$$

Teilaufgabe c)

Querschnittsfläche des Graben = Fläche unter der Parabel :

$$A_{Graben} := \frac{8}{3}$$

Bedingung der Flächengleichheit:

$$A(k) = A_{Graben} \to \frac{k^2}{2} - 4\cdot k + 8 = \frac{8}{3} \text{ auflösen}, k \to \begin{pmatrix} \frac{4\cdot\sqrt{3}}{3} + 4 \\ 4 - \frac{4\cdot\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.309 \\ 1.691 \end{pmatrix}$$ keine Lösung