Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2012

- **Mathematik 12 Technik - Aufgabe BI - Lösung**

Teilaufgabe 1.0
Auf einem Spielplatz wird über den Sandkasten ein dreieckiges Sonnensegel angebracht. Das Koordinaensystem ist so gewählt, dass die Punkte $A_1(0/0/0)$, $A_2(5/0/0)$, $A_3(5/5/0)$ und $A_4(0/5/0)$ die Ecken des Sandkastens beschreiben. Das Sonnensegel wird im Punkt A_3 fest an der Sandkastenecke und in den Punkten $B_k(4/0/k)$ und $C_k(0/4/k)$ jeweils an einer senkrechten Stütze befestigt. Dabei ist k eine reeller Parameter.
Für die Einheiten auf den Koordinatenachsen gilt jeweils 1 LE = 1 m, bei den Berechungen kann auf die Verwendung der Einheiten verzichtet werden.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)
Bestimmen Sie k so, dass das Sonnensegel die Form eines gleichseitigen Dreiecks hat.

Verbindungsvektoren:

$$\overrightarrow{A_3 B_k} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ k \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A_3 C_k} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B_k C_k} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beträge:

$$\left|\overrightarrow{A_3 B_k}\right| = \sqrt{1 + 25 + k^2} = \sqrt{26 + k^2}$$

$$\left|\overrightarrow{A_3 C_k}\right| = \sqrt{1 + 25 + k^2} = \sqrt{26 + k^2}$$

$$\left|\overrightarrow{B_k C_k}\right| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}$$

Bedingung für ein gleichseitiges Dreieck:

$$\sqrt{26 + k^2} = \sqrt{32} \quad \Leftrightarrow \quad 26 + k^2 = 32 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 = 6$$

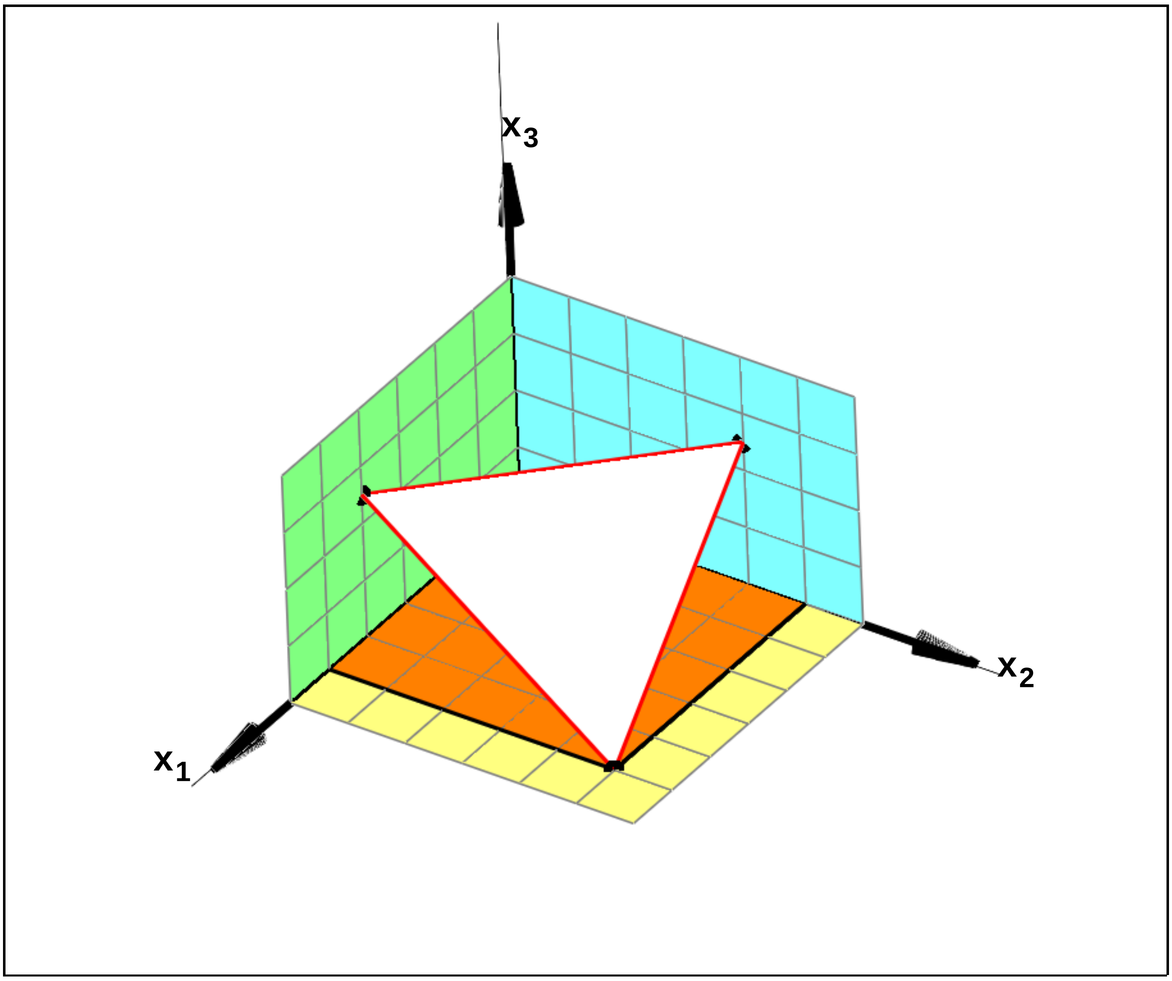
$$\Leftrightarrow \quad k_1 = \sqrt{6} \qquad k_2 = -\sqrt{6}$$

keine Lösung, da das Sonnensegel über dem Sandkasten aufgespannt ist.

Setzen Sie für die folgenden Aufgaben $k = 2.5$.

Teilaufgabe 1.2 (2 BE)
Stellen Sie den Sandkasten und das Sonnensegel in einer Skizze im kartesischen Koordinatensystem dar.

Darstellung



Teilaufgabe 1.3 (4 BE)
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Sonnensegels.

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{A_3 B_{25}} \times \overrightarrow{A_3 C_{25}} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2.5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2.5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix} \right|$$

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{100 + 100 + 576} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{776} = \sqrt{194}$$

gerundet: $A_\Delta \approx 13.96$ FE

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)
Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Fläche des Sonnensegels und der x_1-x_2-Ebene auf zwei Nachkommastellen gerundet.

Vektor, der senkrecht auf dem Sonnensegel steht: $\vec{n_S} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der x_1-x_2-Ebene: $\vec{n_3} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{776} \cdot \sqrt{1}} = \frac{24}{2 \cdot \sqrt{194}} = \frac{12}{\sqrt{194}} \approx 0.8615 \qquad \varphi := \text{acos}(0.8615) \qquad \varphi = 30.51 \cdot °$$

Teilaufgabe 2.0
In einem kartesischen Koordinatensystem des IR^3 sind die Ebenen E_a und die Gerade g gegeben:
E_a: $(1 + a) \cdot x_1 + a \cdot x_2 - (a - 2) \cdot x_3 - a = 0$ mit $a \in IR$ und

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in IR$.

Teilaufgabe 2.1 (2 BE)
Geben Sie für $a = 0$ die besondere Lage der Ebene E_0 im Koordinatensystem an.

E_0: $\quad x_1 + 2 \cdot x_3 = 0$

$E_0 \parallel x_2$-Achse, da x_2-Koordinate nicht vorhanden

E_0 enthält sogar die x_2-Achse, da keine Konstante vorhanden ist.

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)
Untersuchen Sie die Lage der Geraden g zu den Ebenen E_a in Abhängigkeit von a.

1. Möglichkeit:

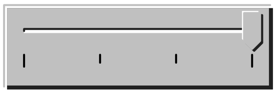
$g \cap E_a$: $\quad (1 + a) \cdot (1 - \lambda) + a \cdot (\lambda) - (a - 2) \cdot (-1 + \lambda) - a = 0 \rightarrow a + \lambda - a \cdot \lambda - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \lambda \cdot (1 - a) = 1 - a \qquad$ Für $a \neq 1 \qquad \lambda = 1$

$\mathbf{a \neq 1}$ g und E_a haben genau einen Schnittpunkt

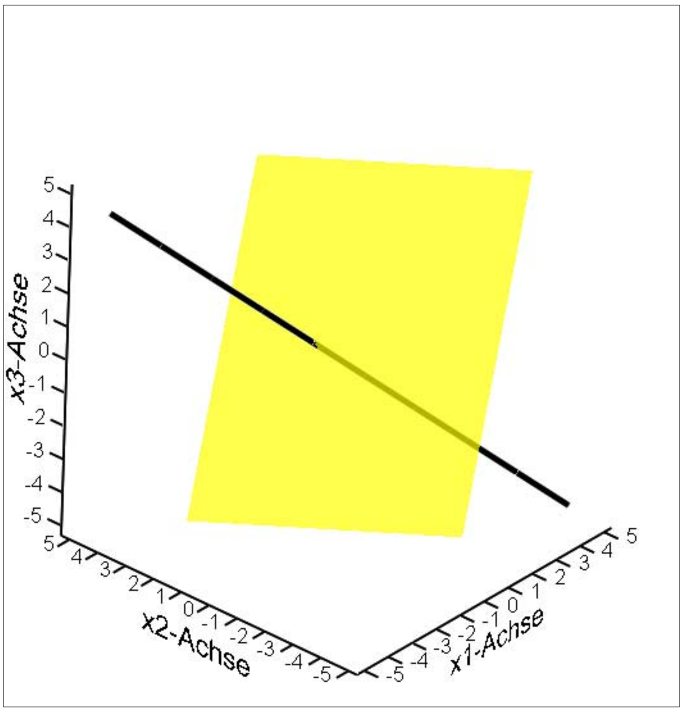
$\mathbf{a = 1}$ $g \subset E_1$

Wählen Sie a:



$$\left(1 + a_0\right) \cdot x_1 + a_0 \cdot x_2 - \left(a_0 - 2\right) \cdot x_3 - a_0 = 0 \rightarrow 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 - 3 = 0$$

Spezielle_Lage → "Gerade schneidet Ebene"



Parameterwert:

$\mathbf{a_0} = \mathbf{3}$

2. Möglichkeit:

Richtungsvektor Gerade: Normalenvektor Ebene: Skalarprodukt = 0:

$$\vec{u_g} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n_E} = \begin{pmatrix} 1 + a \\ a \\ 2 - a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 + a \\ a \\ 2 - a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 1 - a = 0$$

$\Rightarrow$ Für $\mathbf{a = 1}$ ist die Gerade parallel der Ebene

$g \cap E_1$: $\quad 2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$

$\mathbf{2 \cdot (1 - \lambda) + (\lambda) + (-1 + \lambda) - 1}$ **vereinfachen** $\rightarrow \mathbf{0}$ $\Rightarrow$ Gerade liegt in der Ebene E_1.

Für $\mathbf{a \neq 1}$ schneidet die Gerade die Ebene E_a.

Teilaufgabe 2.3 (3 BE)
Zeigen Sie, dass der Punkt P(2/-2/-1) auf allen Ebenen $\mathbf{E_a}$, aber nicht auf der Geraden g liegt.

P in E_a: $(1+a)\cdot 2 + a\cdot(-2) - (a-2)\cdot(-1) - a$ **vereinfachen** $\rightarrow 0$ — Gleichung erfüllt, P liegt in allen Ebenen

P in g: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ **auflösen**, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rightarrow (-1 \quad -2 \quad 0)$ — verschiedene λ_i, P liegt nicht auf der Geraden g.

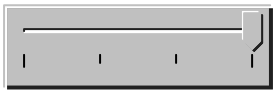
Teilaufgabe 2.4 (5 BE)
Der Punkt P und die Gerade g legen eine Ebene F fest. Geben Sie eine Gleichung der Ebene F in Parameterform an und schließen Sie aus Ihren bisherigen Ergebnissen auf die Lage der Ebenen E_a zur Ebene F in Abhänggigkeit von a.
Begründen Sie Ihre Aussagen ohne weitere Rechnungen.

Ebene F: $\vec{x}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\cdot\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$

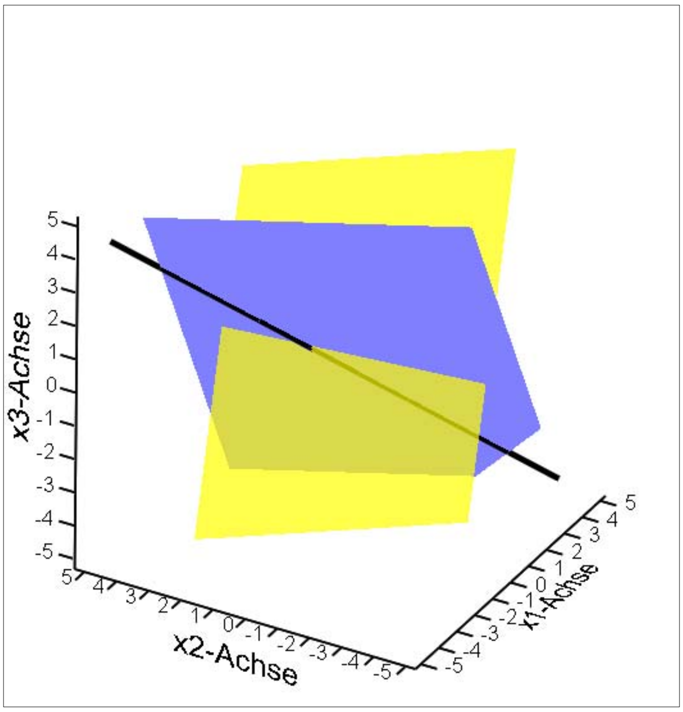
$\vec{x}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

a = 1 $\quad g \subset E_1$ und $P \in E_a \quad \Rightarrow \quad E_1$ identisch F

a ≠ 1 $\quad g \notin E_1$ und $P \in E_a \quad \Rightarrow \quad E_a$ und F schneiden sich in einer Geraden.

Wählen Sie a: 

Spezielle_Lage → "E und F schneiden sich"



Parameterwert:

$\mathbf{a_0} = \mathbf{3}$