Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2012

- **Mathematik 12 Technik - Aufgabe BII - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

In einem kartesischen Koordinatensysterm des IR^3 sind die Punkte $A_k(0.k, 2-2\cdot k)$ mit $k \in IR$ und $B(5, -3, 0)$ gegeben.

Teilaufgabe 1.1 (2 BE)

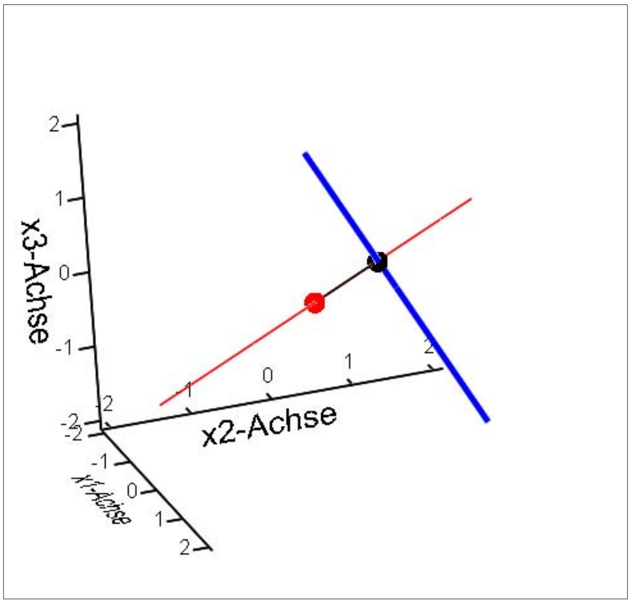
Bestimmen Sie eine Gleichung der Gerade g, auf der alle Punkte A_k liegen.

[Mögliches Ergebnis: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$]

Gerade g: $x_g(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2-2\cdot k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Berechnen Sie den Parameterwert k so, dass der zugehörigen Punkt A_k den kleinstmöglichen Abstand vom Koordinatenursprung hat.



Ortsvektor $\overrightarrow{OA_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2-2\cdot k \end{pmatrix}$ steht

senkrecht auf g:

$\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2-2\cdot k \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 5\cdot k - 4 = 0$

$5\cdot k - 4 = 0$ auflösen, $k \rightarrow \frac{4}{5}$ $\qquad k = \frac{4}{5}$

(0/0/0): rot

$A_{0,8}$(0/0,8/0,4): schwarz

Gerade g: schwarz

Hilfsgerade h durch O und $A_{0,8}$: rot

Teilaufgabe 1.3 (3 B
Zeigen Sie, dass jeder Punkt A_k mit dem Punkt B eindeutig eine Gerade h_k festlegt, und stellen Sie eine Gleichung der Geraden h_k in Abhängigkeit von k auf.

zu zeigen: B $\notin$ g

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2 - 2 \cdot k \end{pmatrix}$$

1. Koordinate: $5 \neq 1$

Gerade h_k:
$$\vec{x_h} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2 - 2 \cdot k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ k + 3 \\ 2 - 2 \cdot k \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)
Ermitteln Sie eine Gleichung in Normalenform für die Ebene E, die durch die Punkte A_0, A_1 und B festgelegt ist.

Ortsvektoren:
$$OA_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad OA_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad OB := \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren:
$$OA_1 - OA_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad OB - OA_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ebene E:
$$x_E(\tau, \sigma) := OA_0 + \tau \cdot (OA_1 - OA_0) + \sigma \cdot (OB - OA_0)$$

$$x_E(\tau, \sigma) = \begin{pmatrix} 5 \cdot \sigma \\ \tau - 3 \cdot \sigma \\ 2 - 2 \cdot \sigma - 2 \cdot \tau \end{pmatrix}$$

Normalenvektor:
$$n_E := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad n_E = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

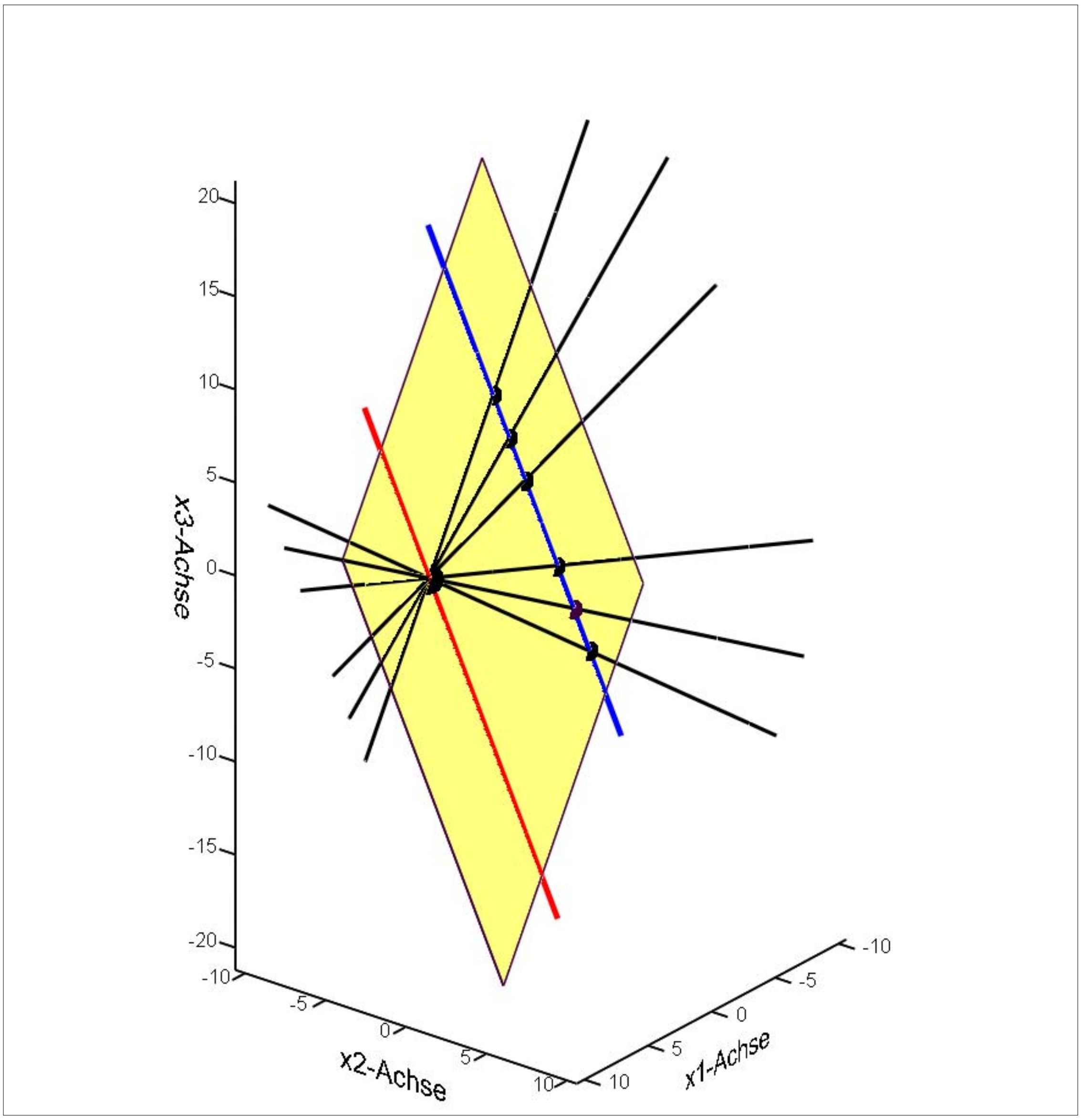
Normalenform von E: Koordinatenform von E:

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 10 - 10 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3 - 8 \cdot x_1 = 0 \qquad B \rightarrow (5 \quad -3 \quad 0)$$

Teilaufgabe 1.5 **(4 BE)**
Geben Sie eine Gleichung der Geraden r an, die in der Ebene E liegt, den Punkt B enthält und nicht zur Menge der Geraden $\mathbf{h_k}$ gehört. Begründen Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer Skizze.

Gerade r $\subset$ E mit B $\in$ E und r $\notin$ h_k: Gerade r mit Aufpunkt B und Richtungsvektor von g

$$\mathbf{x_r}(\rho) := \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Ebene E: gelb
Gerade g: blau
Gerade r: rot

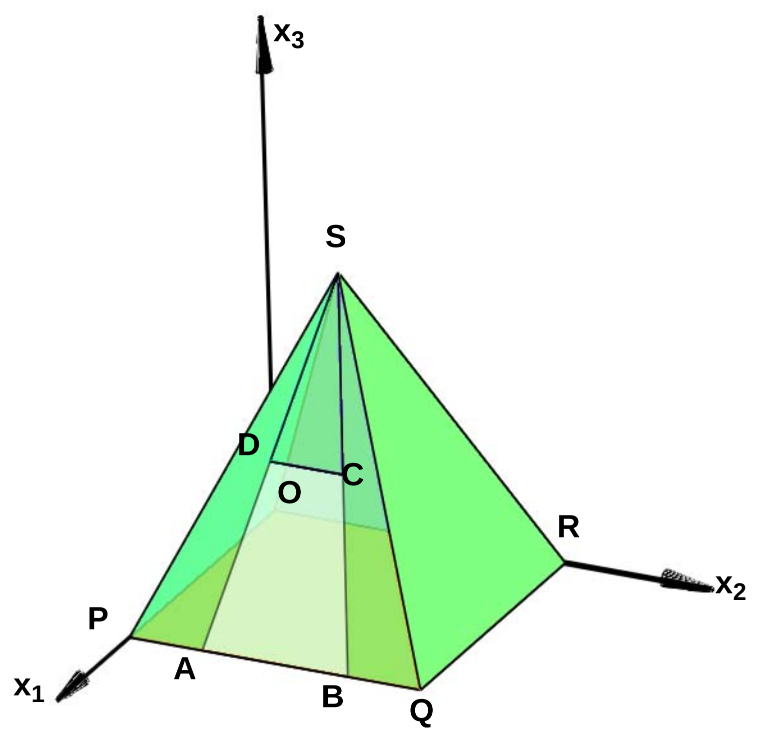
Geraden h_k: schwarz
Punkt B: Büschelpunkt der Geraden h_k

Teilaufgabe 2.0
Die Abbildung zeigt ein Zelt mit der Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge 2 m und der Spitze S in 2 m Höhe über dem Mittelpunkt der Grundfläche.
In der Vorderfläche PQS befindet sich die trapezförmige Einstiegsöffnung ABCD.
Dabei sind C und D die Mittelpunkte der Strecken [BS] bzw. [AS].
Die Strecken [PA] und [BQ] haben jeweils die Länge **0.5·m**.
Maßstab im Koordinatensystem: 1 LE = 1 cm.

▶ Darstellung der Pyramide

▶ Darstellung der Achsenvektoren

Zelt



Teilaufgabe 2.1 (7 BE)
Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C, D und S und berechnen Sie den Flächeninhalt der Einstiegsöffnung.
[Teilergebnis: **D(1,5 / 0,75 / 1)**

Gegeben:

Eckpunkte der Pyramidengrundfläche:

$\mathbf{O} := (0 \;\; 0 \;\; 0)$ $\quad \mathbf{P} := (2 \;\; 0 \;\; 0)$ $\quad \mathbf{Q} := (2 \;\; 2 \;\; 0)$ $\quad \mathbf{R} := (0 \;\; 2 \;\; 0)$

Lösung:

Grundlinie der Einstiegsöffnung: $A := \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Spitze der Pyramide: $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ortsvektoren:

$$OA := A^T \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad OB := B^T = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad OS := S^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Endpunkte der Decklinie der Einstiegsöffnung:

$$OD := OA + \frac{1}{2}\cdot(OS - OA) \qquad OD = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D := OD^T \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$OC := OB + \frac{1}{2}\cdot(OS - OB) \qquad OC = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C := OC^T \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Fläche ΔABS: $\Delta_{ABS} := \frac{1}{2}\cdot\left|(OS - OA) \times (OS - OB)\right|$ $\Delta_{ABS} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Fläche ΔDCS: $\Delta_{DCS} := \frac{1}{2}\cdot\left|(OS - OD) \times (OS - OC)\right|$ $\Delta_{DCS} = \frac{\sqrt{5}}{8}$

Fläche der Zeltöffnung: $F_{ABCD} := \Delta_{ABS} - \Delta_{DCS}$ $F_{ABCD} = \frac{3\cdot\sqrt{5}}{8} = 0.839$

Teilaufgabe 2.2 (7 BE)
Eine als punktförmig angesehene Lichtquelle, die unter 25 cm unter der Zeltspitze S hängt, erzeugt bei geöffneter Einstiegsöffnung auf dem horizontalen Boden vor dem Zelt einen viereckigen Lichtteppich ABC'D'. Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C' und D'.

Koordinaten der Lichtquelle: $L := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$ Ortsvektor: $OL := L^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$

Gerade durch L und D:

$$x_{LD}(\tau) := OL + \tau\cdot(OL - OD) \qquad x_{LD}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\tau}{2} \\ \frac{\tau}{4} + 1 \\ \frac{3\cdot\tau}{4} + \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Spurpunkt in der x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0$

$$\tau_1 := x_{LD}(\tau)_3 = 0 \rightarrow \frac{3\cdot\tau}{4} + \frac{7}{4} = 0 \text{ auflösen}, \tau \rightarrow -\frac{7}{3}$$

$$OD' := x_{LD}(\tau_1) \qquad D' := OD'^T \qquad D' \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{13}{6} & \frac{5}{12} & 0 \end{pmatrix}$$

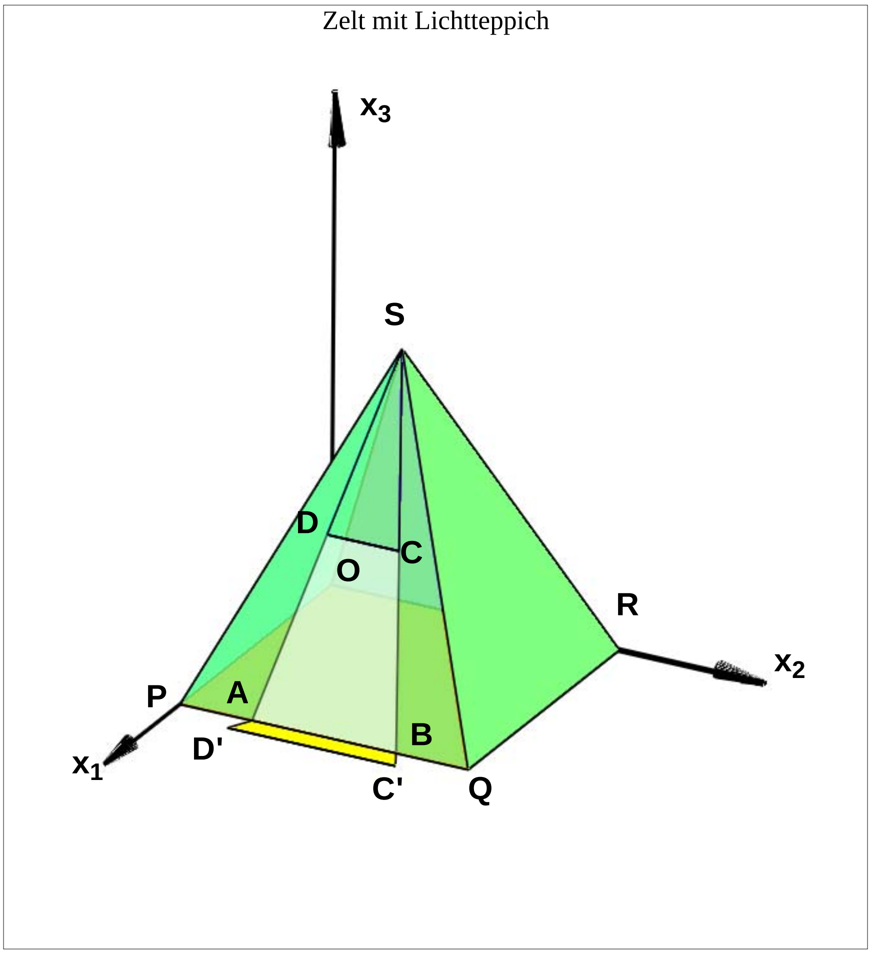
Gerade durch L und C:

$$x_{LC}(\tau) := OL + \tau\cdot(OL - OC) \qquad x_{LC}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\tau}{2} \\ 1 - \frac{\tau}{4} \\ \frac{3\cdot\tau}{4} + \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Spurpunkt in der x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0$

$$\tau_2 := x_{LC}(\tau)_3 = 0 \rightarrow \frac{3\cdot\tau}{4} + \frac{7}{4} = 0 \text{ auflösen}, \tau \rightarrow -\frac{7}{3}$$

$$OC' := x_{LC}(\tau_2) \qquad C' := OC'^T \qquad C' \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{13}{6} & \frac{19}{12} & 0 \end{pmatrix}$$


Zelt mit Lichtteppich
x3
S
D
C
O
R
x2
P
A
B
x1
D'
C'
Q