Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2012

- **Mathematik 13 Technik - Aufgabe AII - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion $f_m(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{a \cdot x^2 - 2}{3 \cdot x^2 + a}$ mit der in IR maximalen Definitionsmenge D_{f_a}

und $a \in \mathrm{IR}$.

Teilaufgabe 1.1 (7 BE)
Bestimmen Sie die Definitionsmenge D_{f_a} sowie die Nullstellen von f_a und deren Anzahl jeweils in Abhängigkeit von a.

Nenner: $3 \cdot x^2 + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -\frac{a}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\sqrt{-\frac{a}{3}} \quad x_2 = \sqrt{-\frac{a}{3}}$

$a > 0$ $\quad$ $D = \mathrm{IR}$

$a = 0$ $\quad$ $D = \mathrm{IR} \setminus \{0\}$

$a < 0$ $\quad$ $D = \mathrm{IR} \setminus \{-\sqrt{-\frac{a}{3}} ; \sqrt{-\frac{a}{3}}\}$

Zähler: $a \cdot x^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{2}{a} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\sqrt{\frac{2}{a}} \quad x_2 = \sqrt{\frac{2}{a}}$

$a > 0$ $\quad$ zwei Nullstellen $\quad x_1 = -\sqrt{\frac{2}{a}} \quad x_2 = \sqrt{\frac{2}{a}}$

$a \le 0$ $\quad$ keine Nullstellen

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Geben Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f_a sowie die Art und Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_a in Abhängigkeit von a an.

$f_a(-x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{a \cdot (-x)^2 - 2}{3 \cdot (-x)^2 + a} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a \cdot x^2 - 2}{3 \cdot x^2 + a} = f_a(x) \quad \Rightarrow$ $\quad$ Achsensymmetrie bzgl. y-Achse

$a > 0$ $\quad$ horizontale Asymptote: $\quad y = \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a}{2}$

$a = 0$ $\quad$ horizontale Asymptote: $\quad y = 0$ $\quad$ senkrechteAsymptote: $\quad x = 0$

$a < 0$ $\quad$ horizontale Asymptote: $\quad y = \frac{a}{2}$

senkrechte Asymptoten mit VZW: $\quad x = -\sqrt{-\frac{a}{3}} \quad x = \sqrt{-\frac{a}{3}}$

Teilaufgabe 1.3 **(4 BE)**
Untersuchen Sie, für welche Werte von a der Graph der Funktion f_a über relative bzw. absolute Extrempunkte verfügt und ermitteln Sie gegebenenfalls Art und Koordinaten dieser Punkte.

[Teilergebnis: $f'_a(x) = \dfrac{3 \cdot x \cdot \left(a^2 + 6\right)}{\left(3 \cdot x^2 + a\right)^2}$]

$$f'_a(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\left(3 \cdot x^2 + a\right) \cdot 2 \cdot a \cdot x - \left(a \cdot x^2 - 2\right) \cdot 6 \cdot x}{\left(3 \cdot x^2 + a\right)^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot a^2 \cdot x - 6 \cdot a \cdot x^3 + 12 \cdot x}{\left(3 \cdot x^2 + a\right)^2}$$

$$\ldots = \frac{3}{2} \cdot \frac{2 \cdot a^2 \cdot x + 12 \cdot x}{\left(3 \cdot x^2 + a\right)^2} = \frac{3 \cdot x \cdot \left(a^2 + 6\right)}{\left(3 \cdot x^2 + a\right)^2}$$

Horizontale Tangenten: $x = 0$ nicht definiert für $a = 0$

$a \neq 0$ $\qquad f_a(0) = -\dfrac{3}{a}$

$$\left(3 \cdot x^2 + a\right)^2 > 0 \wedge a^2 + 6 > 0$$

$a > 0$

		$x = 0$	
Zähler	neg		pos
Nenner	pos		pos
$f'_a(x)$	neg		pos
G_f	smf		sms
		TP	

absoluter Tiefpunkt:

$$TP\left(0, -\frac{3}{a}\right)$$

$a < 0$

		$x \neq -\sqrt{-\frac{a}{3}}$		$x = 0$		$x \neq \sqrt{-\frac{a}{3}}$	
Zähler	neg		neg		pos		pos
Nenner	pos		pos		pos		pos
$f'_a(x)$	neg		neg		pos		pos
G_f	smf		smf		sms		sms
		Pol		TP		Pol	

relativer Tiefpunkt:

$$TP\left(0, -\frac{3}{a}\right)$$

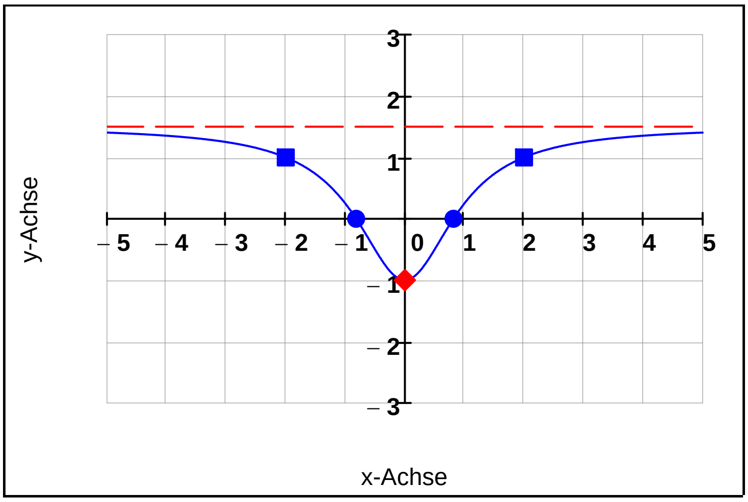
Für die fogenden Teilaufgaben gilt $a = 3$.

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von f_3 im Bereich $-4 \le x \le 4$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und der Funktionswerte $f_2(-2)$ und $f_2(2)$. Tragen Sie auch die zugehörige Asymptote ein.

$$f_3(x) := \frac{3}{2}\cdot\frac{3\cdot x^2 - 2}{3\cdot x^2 + 3} \qquad \text{Vereinfachen:} \qquad f_3(x) := \frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot x^2 - 2}{x^2 + 1}$$

$$f_3(-2) = 1 \qquad f_3(2) = 1 \qquad \text{Nullstellen:} \qquad x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{3} \qquad x_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



Teilaufgabe 1.5.0

Gegeben ist die Funktion $F(x) = \int_0^x f_3(t)\,dt$ mit der Definitionsmenge $D_F = IR$.

Teilaufgabe 1.5.1 (4 BE)

Bestimmen Sie eine integralfreie Darstellung des Funktionsterms $F(x)$.

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot x^2 - 2}{x^2 + 1}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\int_0^x 3 - \frac{5}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\cdot(3\cdot x - 5\cdot\arctan(x) - 0) = \frac{3}{2}\cdot x - \frac{5}{2}\cdot\arctan(x)$$

Nebenrechnung: Polynomdivision $\quad \frac{3\cdot x^2 - 2}{x^2+1} \text{ parfrac } \rightarrow 3 - \frac{5}{x^2+1}$

Teilaufgabe 1.5.2 (5 BE)
Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen G_F der Funktion **F**. Runden Sie dabei gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen.

Es gilt: $F(x) := \frac{3}{2} \cdot x - \frac{5}{2} \cdot \arctan(x)$

$F'(x) = f_3(x)$ $\qquad$ $F''(x) = f'_3(x)$

Zeichnung aus 1.4

G_F ist streng monoton steigend für $x \in \left] -\infty \; ; -\frac{\sqrt{6}}{3} \right]$ und für $x \in \left] \frac{\sqrt{6}}{3} \; ; \infty \right]$

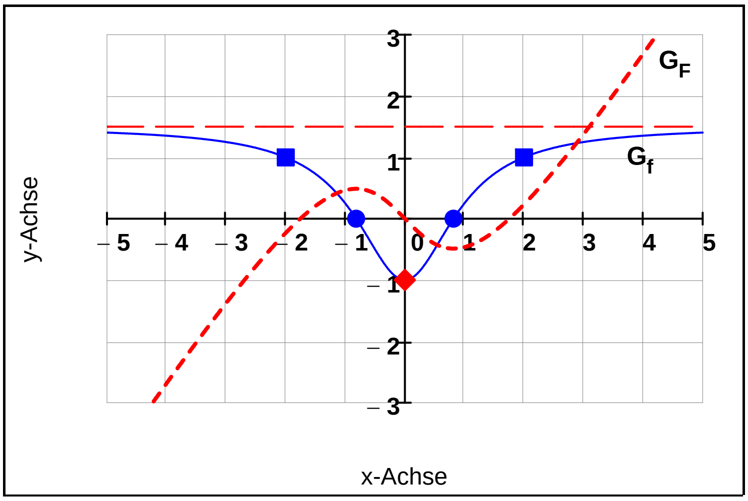
G_F ist streng monoton fallend für $x \in \left[-\frac{\sqrt{6}}{3} \; ; \frac{\sqrt{6}}{3} \right]$

$F\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{5 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} = 0.49$ $\qquad$ rel. Hochpunkt $\qquad$ $HP(-0.82, 0.49)$

$F\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{5 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}{2} = -0.49$ $\qquad$ rel. Tiefpunkt $\qquad$ $HP(0.82, -0.49)$

Wendepunkt: $\qquad x_W := 0 \qquad F(x_W) = 0 \qquad WP(0, 0)$

Folgende Darstellung der Stammfunktion (rot) in der Prüfung nicht verlangt:



Teilaufgabe 1.6.0
Gegeben ist weiter die Funktion $g(x) = \arcsin(f_3(x))$ in der maximalen Definitionsmenge $D_g \subseteq IR$.

Teilaufgabe 1.6.1 (3 BE)
Geben Sie mit kurzer Begründung die Definitionsmenge D_g sowie die Nullstellen von g an.

$$g(x) := \arcsin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot x^2-2}{x^2+1}\right)$$

Mithilfe der Funktionswerte aus 1.4 folgt: $D_g = [-2\ ;\ 2]$

Nullstelle von g = Nullstelle von f_3: $x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ $x_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Teilaufgabe 1.6.2 (7 BE)
Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und die Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von g.

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(f_3(x))^2}}\cdot f'_3(x) \quad \Rightarrow \quad g'(x) := \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot x^2-2}{x^2+1}\right)^2}}\cdot\frac{14\cdot x}{3\cdot\left(x^2+1\right)^2}$$

Nullstellen des Nenners:

$$1-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot x^2-2}{x^2+1}\right)^2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $g'(x)$ und $f'_3(x)$ haben das gleiche Vorzeichen für $x \in\ ]-2\ ;\ 2\ [\ \setminus\ \{0\}$

Es gilt: $\frac{1}{\sqrt{1-(f_3(x))^2}} > 0$ und $\left(x^2+1\right)^2 > 0$

Es gibt keine horizontalen Tangenten.

G_g ist streng monoton fallend in $]\,-2\,;\ 0\,[$ und G_g ist streng monoton steigend in $]\,0\,;\ 2\,[$

rel. Extrempunkt: $\quad g(0) = -\frac{\pi}{2} = -1.571 \quad \Rightarrow \quad TP\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$

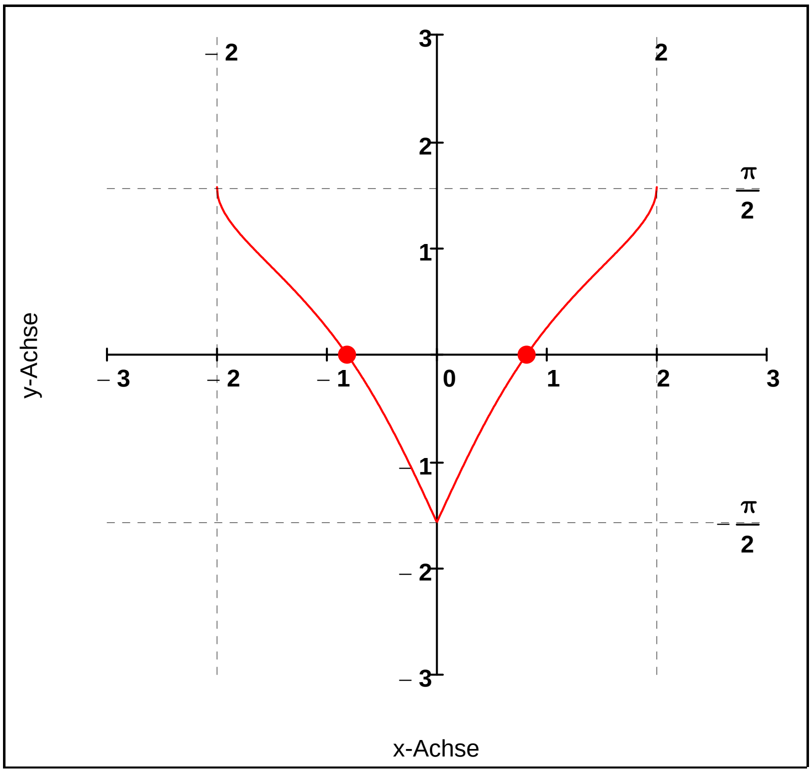
zusätzlich: $\quad \lim_{x \to 0^-} g'(x) \to -\frac{14\cdot\sqrt{5}}{15} \qquad \lim_{x \to 0^+} g'(x) \to \frac{14\cdot\sqrt{5}}{15}$

Es gibt Extrema auf dem Rand:

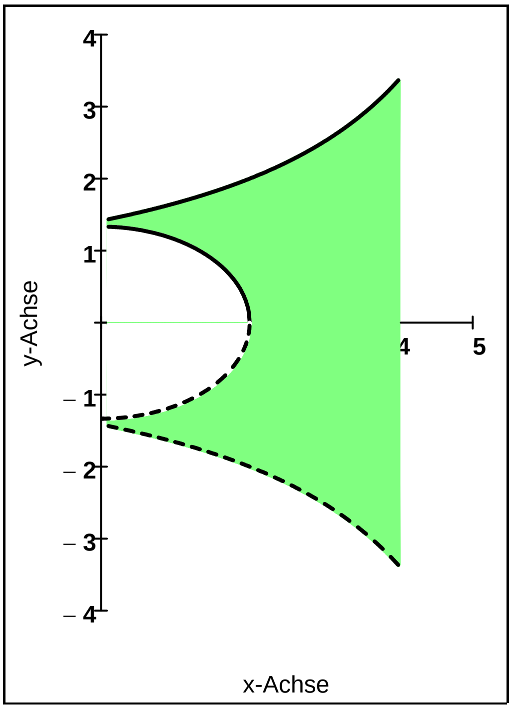
Randmaximum 1: $\quad g(-2) = \frac{\pi}{2} = 1.571 \qquad HP_1\left(-2, \frac{\pi}{2}\right)$

Randmaximum 2: $\quad g(2) = \frac{\pi}{2} = 1.571 \qquad HP_2\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$

Graphische Darstellung in der Prüfung nicht verlangt.



Teilaufgabe 2 **(9 BE)**
Rotiert die nebenstehende schraffierte Fläche um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper.
Nach oben bzw. unten wird der Querschnitt durch die Funktion $y = \pm \frac{\sqrt{98 + x}}{7 - x}$ und nach innen durch $y = \pm \frac{2}{3} \cdot \sqrt{4 - x^2}$ begrenzt.
Berechnen Sie die Volumenmaßzahl des rotationssymmetrischen Körpers auf eine Nachkommastelle genau.



Die Gesamtfläche setzt sich aus zwei Teilflächen zusammen.

$$V_1 = \pi \cdot \int_0^4 \left(\frac{\sqrt{98 + x}}{7 - x} \right)^2 dx$$

$$V_2 = \int_0^2 \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{4 - x^2} \right)^2 dx$$

$$V_{ges} = V_1 - V_2$$

Nebenrechnung 1:
$$\int \frac{98 + x}{(7 - x)^2} dx = \int \left[\frac{98}{(7 - x)^2} + \frac{x}{(7 - x)^2} \right] dx$$

Substitution: $z = 7 - x$ $\quad x = 7 - z$ $\quad \frac{dz}{dx} = -1$ $\quad dx = -dz$

$$\int -\left(\frac{98}{z^2} + \frac{7 - z}{z^2} \right) dz = \int -\left(\frac{98}{z^2} + \frac{7}{z^2} - \frac{1}{z} \right) dz = \int -\left(\frac{105}{z^2} - \frac{1}{z} \right) dz$$

$$\ldots = \frac{-105 \cdot (-1)}{z} - \ln(|z|) = \frac{105}{z} - \ln(|z|) = \frac{105}{7 - x} + \ln(|7 - x|)$$

$F_1(x) := \frac{105}{7-x} + \ln(|7-x|)$ $\quad V_1 := \pi\cdot(F_1(4) - F_1(0))$ $\quad V_1 = \pi\cdot(\ln(3) - \ln(7) + 20) = 60.17$

Nebenrechnung 2: $\quad \int \frac{4}{9}\cdot(4-x^2)\,dx = \frac{4}{9}\cdot\left(4\cdot x - \frac{x^3}{3}\right)$

$F_2(x) := \frac{4}{9}\cdot\left(4\cdot x - \frac{x^3}{3}\right)$ $\quad V_2 := \pi\cdot(F_2(2) - F_2(0))$ $\quad V_2 = \frac{64\cdot\pi}{27} = 7.447$

$V_{ges} := V_1 - V_2 = \pi\cdot(\ln(3) - \ln(7) + 20) - \frac{64\cdot\pi}{27}$ $\quad V_{ges} = 52.7$

Teilaufgabe 3 (9 BE)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' + y\cdot\tan(x) = e^x\cdot(\cos(x))^2$ mit der Methode der Variation der Konstanten für $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

Inhomogene DGL: $\quad y' + y\cdot\tan(x) = e^x\cdot(\cos(x))^2$

Homogene DGL: $\quad y' + y\cdot\tan(x) = 0$

Triviale Lösung: $\quad y = 0$

Im Folgenden: $\quad y \neq 0$

Differentialquotient: $\quad \frac{dy}{dx} = -\tan(x)\cdot y$

Trennen der Variablen: $\quad \frac{dy}{y} = -\tan(x)\cdot dx$

Integration: $\quad \int \frac{1}{y}\,dy = \int -\tan(x)\,dx + k \rightarrow \ln(|y|) = k + \ln(|\cos(x)|)$

Auflösen des Betrags: $\quad$ für $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ gilt: $\cos(x) > 0$

$y > 0$ $\quad y = e^{k+\ln(\cos(x))} = K_1\cdot\cos(x)$ $\quad$ mit $K_1 = e^k$

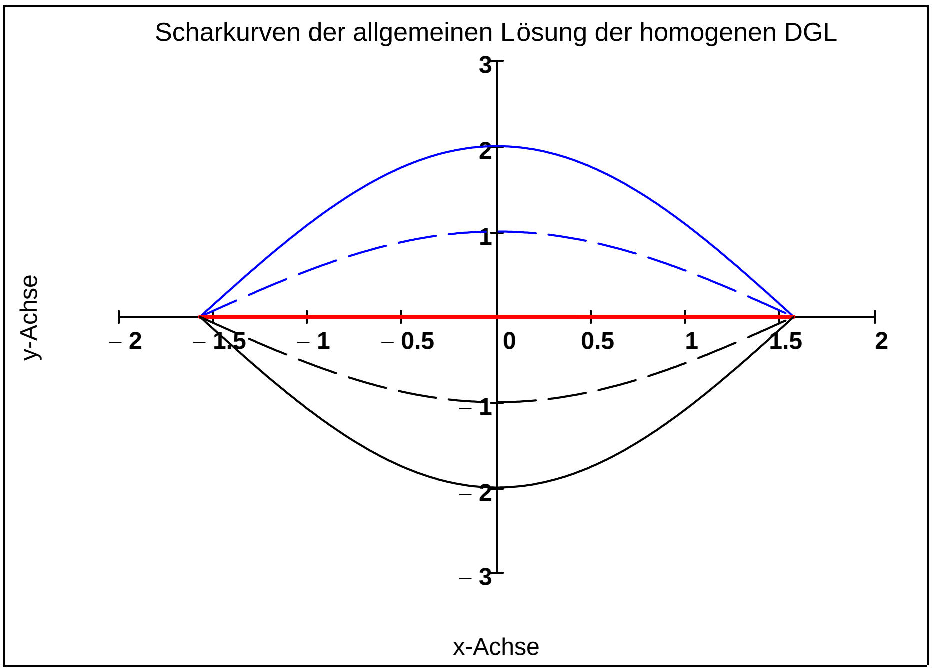
$y < 0$ $\qquad y = -e^{k+\ln(\cos(x))} = -K_1 \cdot \cos(x)$ $\qquad$ mit $K_2 = e^k$

Zusammenfassung inklusive trivialer Lösung: $\qquad y_H(x) = K \cdot \cos(x)$

In der Prüfung nicht verlangt:

Kurvenschar: $\qquad y_H(x, K) := K \cdot \cos(x)$

Definitionsmenge: $\qquad x1 := \frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2} + 0.01 .. \frac{\pi}{2}$



Variation der Konstanten: $\qquad y_S(x) = K(x) \cdot \cos(x)$

$y'_S(x) = K'(x) \cdot \cos(x) + K(x) \cdot (-\sin(x))$

Einsetzen in inhomogene DGL: $\qquad y' + y \cdot \tan(x) = e^x \cdot (\cos(x))^2$

$K'(x) \cdot \cos(x) + K(x) \cdot (-\sin(x)) + K(x) \cdot \cos(x) \cdot \tan(x) = e^x \cdot (\cos(x))^2$

$K'(x) \cdot \cos(x) = e^x \cdot (\cos(x))^2$

$\Rightarrow \qquad K'(x) := e^x \cdot \cos(x)$

$$K(x) = \int K'(x)\,dx \qquad \Rightarrow \qquad K(x) := \int e^{x}\cdot\cos(x)\,dx = \frac{e^{x}\cdot(\cos(x)+\sin(x))}{2}$$

Nebenrechnung für: $\int e^{x}\cdot\cos(x)\,dx$

$u(x) = e^{x} \qquad u'(x) = e^{x}$

$v'(x) = \cos(x) \qquad v(x) = \sin(x)$

$$\int e^{x}\cdot\cos(x)\,dx = e^{x}\cdot\sin(x) - \int \sin(x)\cdot e^{x}\,dx$$

$u(x) = e^{x} \qquad u'(x) = e^{x}$

$v'(x) = \sin(x) \qquad v(x) = -\cos(x)$

$$\int e^{x}\cdot\cos(x)\,dx = e^{x}\cdot\sin(x) - e^{x}\cdot(-\cos(x)) + \int -\cos(x)\cdot e^{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \qquad 2\cdot\int e^{x}\cdot\cos(x)\,dx = e^{x}\cdot(\sin(x)+\cos(x))$$

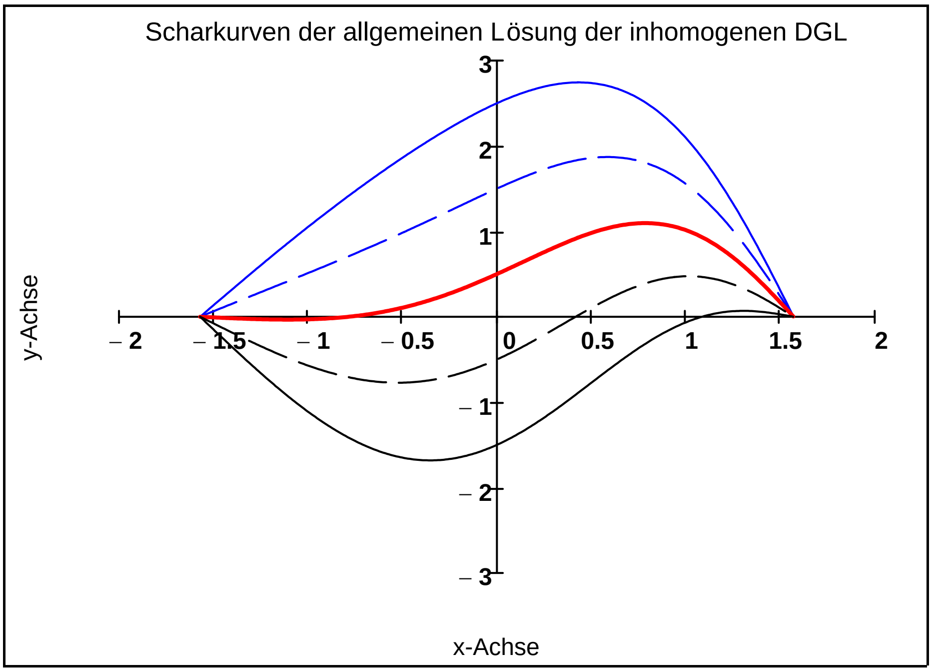
$$\Rightarrow \qquad \int e^{x}\cdot\cos(x)\,dx = \frac{e^{x}\cdot(\sin(x)+\cos(x))}{2}$$

Spezielle Lösung des inhomogenen Systems:

$$y_S(x) := \frac{e^{x}\cdot(\sin(x)+\cos(x))}{2}\cdot\cos(x) \qquad\qquad y_S(x) = \frac{e^{x}\cdot\cos(x)\cdot(\cos(x)+\sin(x))}{2}$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems:

$$y_A(x,K) := K\cdot\cos(x) + \frac{e^{x}\cdot\cos(x)\cdot(\cos(x)+\sin(x))}{2}$$


Scharkurven der allgemeinen Lösung der inhomogenen DGL
3
2
1
– 1
– 2
– 3
– 2
– 1.5
– 1
– 0.5
0
0.5
1
1.5
2
y-Achse
x-Achse