Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2012

• Mathematik 13 Technik - Aufgabe B I - Lösung

Während der Fußballweltmeisterschaft 2010 in Südafrika gelangte der Krake Paul aus dem Aquarium in Oberhausen zu großer Berühmtheit. *Orakel-Paul* konnte den Ausgang von acht Spielen richtig voraussagen (die sieben deutschen Spiele und das Endspiel). Dabei musste er sich immer wieder zwischen zwei Futterboxen entscheiden, die jeweils eine Miesmuschel und die Flagge einer der beiden aufeinandertreffenden Mannschaften enthielten. Bei der Befragung des Orakels wird davon ausgegangen, dass Krake Paul eine der beiden Boxen willkürlich wählt.

Teilaufgabe 1 (9 BE)
Beachten Sie, dass für die gesamte Aufgabe 1 aus Vereinfachungsgründen gilt: es gibt jeweils nur zwei Ausgänge (Sieg bzw. Niederlage), die gleichwahrscheinlich sind.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Unwissender (davon muss man bei Paul wohl ausgehen) beim Tippen des Ausgangs
a) von acht Fußballspielen genau sieben richtig sind,
b) von acht Fußballspielen das erste und genau ein weiteres Spiel richtig tippt,
c) von den 64 Spielen der WM genau 32 richtig tippt,
d) von den 64 Spielen der WM mindestens 32 richtig tippt,
e) von den 64 Spielen der WM mindestens 26 aber höchstens 38 richtig tippt,
f) von den 306 Spielen einer Bundesligasaison genau 140 richtig tippt.

Teilaufgabe a)

$$P(A) = \binom{8}{7} \cdot 0.5^7 \cdot 0.5^1 = 8 \cdot 0.5^8 = 0.03125$$

Teilaufgabe b)

$$P(B) = 0.5 \cdot B(7, 0.5, 1) = 0.5 \cdot 0.05469 = 0.02735$$

Teilaufgabe c)

$$P(C) = B(64, 0.5, 32) = \binom{64}{32} \cdot 0.5^{32} \cdot 0.5^{32} = 0.09935$$

Teilaufgabe c)

$$P(D) = P(X \le 32) = 1 - P(X \le 31) = 1 - \sum_{i=0}^{31} B(64, 0.5, i)$$

Näherung durch Normalverteilung:

Erwartungswert: $\mu := 64 \cdot 0.5 = 32$ Standardabweichung: $\sigma := \sqrt{\mu \cdot 0.5} = 4$

$$P(D) = 1 - \Phi\left(\frac{31 - 32 + 0.5}{4}\right) = 1 - \Phi(-0.125) = 1 - (1 - \Phi(0.125)) = \Phi(0.125) = 0.54776$$

Teilaufgabe d)

$$P(D) = P(26 \le X \le 38) = \Phi\left(\frac{38 - 32 + 0.5}{4}\right) - \Phi\left(\frac{25 - 32 + 0.05}{4}\right)$$

$$\ldots = \Phi(1.625) - \Phi(-1.738) = \Phi(1.625) - (1 - \Phi(1.738))$$

$$\ldots = 0.94738 - 1 + 0.95818 = 0.90556$$

Teilaufgabe e)

$\mu := 306 \cdot 0.5 = 153$ $\qquad$ $\sigma := \sqrt{\mu \cdot 0.5} = 8.746$

$$B(306, 0.5, 140) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{140 - 153}{\sigma}\right) = \frac{1}{8.746} \cdot \varphi(-1.486) = \frac{1}{8.746} \cdot \varphi(1.486) = \frac{0.13344}{8.746} = 0.01526$$

Teilaufgabe 2 (3 BE)
Die Voraussage de Orakels über den Ausgang des Endspiels wollten sich mehr als hundert Journalisten vor Ort ansehen, sie wurde von Fernsehkameras in viele Länder live übertragen. Durch den Besucherandrang bildeten sich lange Schlangen vor dem Aquarium. Eine Klasse mit 29 Schülern und 3 Lehrern musste in drei Gruppen aufgeteilt werden. Dabei bestanden die ersten beiden Gruppen aus je 12 Schülern, die restlichen Schüler waren in der letzten Gruppe. In jeder Gruppe war zusätzlich eine Lehrkraft. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, um die Gruppen nach obiger Vorschrift zu bilden.

1. Gruppe: $\binom{29}{12} \cdot 3$ Möglichkeiten

2. Gruppe: $\binom{17}{12} \cdot 2$ Möglichkeiten

$$|\Omega| = \binom{29}{12} \cdot 3 \cdot \binom{17}{12} \cdot 2 = 1.92679 \times 10^{12}$$

Teilaufgabe 3.0
Um die Popularität seines berühmten Bewohners auszunutzen, wollen die Aquariumbetreiber eine große Paul-Gummipuppe im Souvenirladen verkaufen. Dafür wurde ein Angebot von Hersteller A eingeholt, der Folgendes verspricht: Mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10% entsprechen die Gummikraken nicht den strengen Anforderungen des Aquariums (Nullhypothese). Das Aquarium versucht nun mit Hilfe eines Signifikanztests auf dem Signifikanzniveau von 2,5% die Lieferung zu überprüfen und bestimmt dazu die Anzahl der fehlerhaften Exemplare von 150 Gummikraken.

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)
Ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich und den Annahmebereich der Nullhypothese.

Testgröße: Anzahl der fehlerhaften Kraken bei $N := 150$ überprüften

Testgröße:	Anzahl der fehlerhaften Kraken bei $N := 150$ überprüften
Testart:	Rechtsseitiger Signifikanztest
Wahrscheinlicghkeit:	$p := 0.1$
Nullhypothese H_0:	$p_0 \leq p \rightarrow p_0 \leq 0.1$
Gegenhypothese H_1:	$p_1 > p \rightarrow p_1 > 0.1$
Signifikanzniveau:	$\alpha_S := 0.025$
Annahmebereich:	$A = \{\ 0, 1, 2, \ldots, k\}$
Ablehnungsbereich:	$\overline{A} = \{\ k+1, k+2, \ldots, N\}$

Lösung mit Tafelwerk:

$$1 - P_A \leq 0.025 \quad \Leftrightarrow \quad P_A \geq 0.975 \quad \Leftrightarrow \quad F(k) \geq 0.975$$

Kumulative Binomialverteilung: $F(k) = \sum_{i=0}^{k} B(150, 0.1, i)$

Näherung durch Normalverteilung: $\mu := 150 \cdot 0.1 = 15$ $\sigma := \sqrt{\mu \cdot 0.9} = 3.674$

$$\Phi\left(\frac{k - 15 + 0.5}{3.674}\right) \geq 0.975 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k - 15 + 0.5}{3.674} \geq 1.960$$

$k := 1.960 \cdot 3.674 + 15 - 0.5$ $k = 21.701$

Aufrunden: $k := 22$

Annahmebereich: $A = \{\ 0, 1, 2, \ldots, 22\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{\ 23; 68;\ \ldots ; 150\}$

Teilaufgabe 3.2 (4 BE)
Erklären Sie, was man bei dem vorliegenden Test unter dem Fehler 2. Art versteht, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art, wenn in Wirklichkeit 25% der Kraken fehlerhaft sind.

$p_{neu} := 0.25$

Fehler 2. Art: Die falsche Nullhypothese wird als richtig angenommen.
In der Stichprobe befinden sich höchstens 22 fehlerhafte Kraken, obwohl der Ausschussanteil 10% übersteigt.

Näherung durch Normalverteilung: $\mu := 150 \cdot 0.25 = 37.5$ $\sigma := \sqrt{\mu \cdot 0.75} = 5.303$

$$P(A) = P(X \le 22) = \Phi\left(\frac{22 - 37.5 + 0.5}{5.303}\right) = \Phi(-2.829) = 1 - \Phi(2.829) = 1 - 0.99760 = 0.0024$$

Fehler 2. Art: $\beta := 0.0024$ $\beta = 0.24\%$

Teilaufgabe 3.3 (7 BE)
Für die Gewinner eines Preisausschreibens benötigt ein Zeitschriftenverlag 200 einwandfreie Gummikraken. Für viele Gummikraken muss der Verlag mindestens kaufen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% wenigstens 200 einwandfreie Stücke erhält, wenn die Wahrscheinlichkeit einen fehlerhaften Kraken zu erhalten 10% beträgt.

X: Anzahl der einwandfreien Kraken unter n gekauften Kraken.

Wahrscheinlichkeit für fehlerfreien Kraken: $p := 0.90$

$\mu = n \cdot 0.90$ $\sigma = \sqrt{n \cdot 0.9 \cdot 0.1}$

$$P(X \ge 200) \ge 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \le 199) \ge 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \le 199) \le 0.05$$

Näherung durch Normalverteilung: $\Phi\left(\frac{199 - n \cdot 0.90 + 0.5}{\sqrt{n \cdot 0.9 \cdot 0.1}}\right) \le 0.05$

Tafelwerk: $\frac{199 - n \cdot 0.90 + 0.5}{\sqrt{n \cdot 0.9 \cdot 0.1}} \le -1.645$

Umformung: $199.5 - 0.9 \cdot n \le -1.645 \cdot 0.3 \cdot \sqrt{n}$

$0.9 \cdot n - 0.4935 \cdot \sqrt{n} - 199.5 \ge 0$

Substitution: $\sqrt{n} = z$ $\Rightarrow$ $0.9 \cdot z^2 - 0.4935 \cdot z - 199.5 \ge 0$

$$0.9 \cdot z^2 - 0.4935 \cdot z - 199.5 \geq 0 \;\left|\begin{array}{l}\text{auflösen}, z\\ \text{Gleitkommazahl}, 5\end{array}\right. \rightarrow -\infty < z \leq -14.617 \vee 15.165 \leq z < \infty$$

$z \geq 15.165$

Resubstitution: $n := 15.165^2 = 229.977$

Aufrunden: $n = 230$

Man muss also mindestens 230 Kraken kaufen.

Teilaufgabe 4.0
Um die wartenden Besucher zu unterhalten wird auch eine Tombola organisiert. Die 2300 Lose sollen dabei dem Aquarium einen Gewin von 2000,- € bescheren. Es werden ein Hauptpreis, 100 mittlere Preise und 250 kleinere Preise vergeben, wobei ausschließlich Geldpreise ausgeschüttet werden: ein mittlerer Preis ist 4mal so hoch wie ein kleiner Preis, und der Hauptpreis 25mal höher als der mittlere Preis.

Teilaufgabe 4.1 (7 BE)
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgößе Y: *Gewinn der Kunden pro Los*, wenn ein Los 2,50 € kostet. Berechnen Sie den zugehörigen Erwartungswert und die Standardabweichung.

x gibt den Wert des kleinen Preises in Euro an.

Einnahmen durch verkaufte Lose: $2300 \cdot 2.5 = 5750$

Ausgaben durch Preise: $100 \cdot 4 \cdot x + 25 \cdot 4 \cdot x + 250 \cdot x = 750 \cdot x$

Wert des kleinen Preises: $2300 \cdot 2.50 - (100 \cdot 4 \cdot x + 25 \cdot 4 \cdot x + 250 \cdot x) = 2000 \text{ auflösen}, x \rightarrow 5.0$

Y ist der Gewinn eines Kunden pro Los in Euro.

Anzahl der Preise: 351 2300 Lose also $2300 - 351 = 1949$ Nieten

Ist das Los ist eine Niete, so bedeutet das 2,5 Euro Verlust.

Kleinerer Preis: 5,00 Euro - 2,50 Euro = 2,50 Euro

Mittlerer Preis: 20 Euro - 2,50 Euro = 17,50 Euro

Hauptpreis: 500 Euro - 2,50 Euro: 497,5 Euro gewinn

$$\begin{pmatrix} \text{"Y in Euro"} & -2.5 & 2.5 & 17.5 & 497.5 \\ P(Y = y) & \frac{1949}{2300} & \frac{250}{2300} & \frac{100}{2300} & \frac{1}{2300} \end{pmatrix}$$

Erwartungswert:

$$\mu := -2.5 \cdot \frac{1949}{2300} + 2.5 \cdot \frac{250}{2300} + 17.5 \cdot \frac{100}{2300} + 497.5 \cdot \frac{1}{2300} \qquad \mu = -0.87$$

Varianz:

$$Var := (-2.5)^2 \cdot \frac{1949}{2300} + (2.5)^2 \cdot \frac{250}{2300} + (17.5)^2 \cdot \frac{100}{2300} + (497.5)^2 \cdot \frac{1}{2300} - (-0.87)^2 \qquad Var = 126.145$$

Standardabweichung:

$$\sigma := \sqrt{Var} \qquad \sigma = 11.231$$

Teilaufgabe 4.2 (4 BE)
Ein Besucher möchte mit seiner Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens ein Gewinnlos haben. Berechnen Sie, wieviel Lose er mindestens kaufen muss.
Dabei soll die Binomialverteilung zugrunde gelegt werden.

X: Anzahl der Gewinnlose bei n-mal Ziehen

$$P(X \geq 1) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X = 0) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P(X = 0) \leq 0.05$$

$$\binom{n}{0} \cdot \left(\frac{351}{2300}\right)^0 \cdot \left(\frac{1949}{2300}\right)^n \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1949}{2300}\right)^n \leq 0.05$$

$$\Leftrightarrow \quad n \cdot \ln\left(\frac{1949}{2300}\right) \leq \ln(0.05) \qquad n := \frac{\ln(0.05)}{\ln\left(\frac{1949}{2300}\right)} = 18.091$$

Der Besucher muss mindestens 19 Löse kaufen.