Leistungskurs Gymnasium 1990
Mathematik - Infinitesimalrechnung 1 - Lösung

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion $f(x) := \begin{cases} 4\cdot(1-x)\cdot e^{x-1} & \text{if } x \le 1 \\ -4\cdot\dfrac{\ln(x)}{x} & \text{if } x > 1 \end{cases}$

Der Graph der Funktion wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Geben Sie die Nullstelle der Funktion f an und bestimmen Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$.

$$4\cdot(1-x)\cdot e^{x-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-x=0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 1$$

einzige Nullstelle NS(1 / 0)

$$\lim_{x\to-\infty}\left[4\cdot\overset{\substack{\infty\\ \uparrow}}{(1-x)}\cdot\overset{\substack{0\\ \uparrow}}{e^{x-1}}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\overset{\substack{\infty\\ \uparrow}}{4\cdot(1-x)}}{\underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{e^{1-x}}}\right] \overset{\text{I.H.}}{=} \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-4}{\underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{-e^{1-x}}}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(-4\cdot\frac{\overset{\substack{\infty\\ \uparrow}}{\ln(x)}}{\underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{x}}\right) \overset{\text{I.H.}}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-4}{\underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{x\cdot 1}}\right) = 0$$

Teilaufgabe 1.2 **(11 BE)**

Ermitteln Sie die erste Ableitung von f. Untersuchen Sie insbesondere, ob diese Ableitung auch an der Stelle $x = 1$ existiert.

Teilergebnis: $f'(x) = \begin{cases} -4\cdot x\cdot e^{x-1} & \text{if } x < 1 \\ 4\cdot x^{-2}\cdot(\ln(x)-1) & \text{if } x > 1 \end{cases}$

Berechnen Sie die 2. Ableitung von f für $x \ne 1$, und bestimmen Sie den linksseitigen und den rechtsseitigen Grenzwert der 2. Ableitung an der Stelle $x = 1$.

$$f'_1(x) := 4\cdot(-1)\cdot e^{x-1} + 4\cdot(1-x)\cdot e^{x-1} = -4\cdot x\cdot e^{x-1}$$

$$f'_2(x) := -4\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{4\cdot(\ln(x)-1)}{x^2}$$

Vergleiche mit Teilergebnis.

$\lim_{x \to 1^-} (-4 \cdot \exp(x-1) \cdot x) \to -4$ $\qquad$ $\lim_{x \to 1^+} \left(4 \cdot \frac{-1 + \ln(x)}{x^2}\right) \to -4$

$\Rightarrow$ f ist diff.bar und $f'(1) = -4$

$f''_1(x) := \frac{d}{dx} f'_1(x) = -4 \cdot e^{x-1} \cdot (x+1)$

$-4 \cdot \exp(x-1) \cdot x - 4 \cdot \exp(x-1)$ durch Faktorisierung, ergibt $-4 \cdot \exp(x-1) \cdot (x+1)$

$f''_1(x) := -4 \cdot \exp(x-1) \cdot (x+1)$

$f''_2(x) := \frac{d}{dx} f'_2(x) = -\frac{4 \cdot (2 \cdot \ln(x) - 3)}{x^3}$

$$f''(x) := \begin{cases} -4 \cdot e^{x-1} \cdot (x+1) & \text{if } x < 1 \\ -4 \cdot \dfrac{-3 + 2 \cdot \ln(x)}{x^3} & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1^-} \left[-4 \cdot e^{x-1} \cdot (x+1)\right] \to -8$

$\lim_{x \to 1^+} \left(-4 \cdot \frac{-3 + 2 \cdot \ln(x)}{x^3}\right) \to 12$

Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ Wendepunkt auf der Nahtstelle

Teilaufgabe 1.3 **(9 BE)**
Bestimmen Sie die Lage und Art der Extrempunkte sowie die Wendepunkte des Graphen G_f .

Prüfen Sie, ob für $x = 1$ ein Wendepunkt vorliegt.

Extrema:
Die abschnittsweisen definierten Funktionsterme der 1. Ableitung werden gleich Null gesetzt..

$f'_1(x) = 0 \to -4 \cdot x \cdot e^{x-1} = 0$ auflösen, $x \to 0$

$x_{E1} := 0$ $\qquad$ $f(x_{E1}) = 4 \cdot e^{-1} = 1.472$

$f''_1(x_{E1}) = -4 \cdot e^{-1} = -1.472$ $\qquad$ **$< 0 \Rightarrow$ Hochpunkt** $\qquad$ $HP\left(0, \frac{4}{e}\right)$

$f'_2(x) = 0 \to \frac{4 \cdot \ln(x) - 4}{x^2} = 0$ auflösen, $x \to e$

$x_{E2} := e$ $\qquad$ $f(x_{E2}) = -4 \cdot e^{-1} = -1.472$

$f''_2(x_{E2}) = 4 \cdot e^{-3} = 0.199$ $\quad > 0 \Rightarrow$ **Tiefpunkt** $\quad \boxed{TP\left(e, \frac{-4}{e}\right)}$

Wendepunkte:
Die abschnittsweisen definierten Funktionsterme der 2. Ableitung werden gleich Null gesetzt..

$f''_1(x) = 0 \rightarrow -4 \cdot e^{x-1} \cdot (x+1) = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow -1$ $\quad$ einfache Nullstelle

$f(-1) = 8 \cdot e^{-2} = 1.083$ $\quad \Rightarrow$ **Wendepunkt** $\quad \boxed{WP_1\left(-1, \frac{8}{e^2}\right)}$

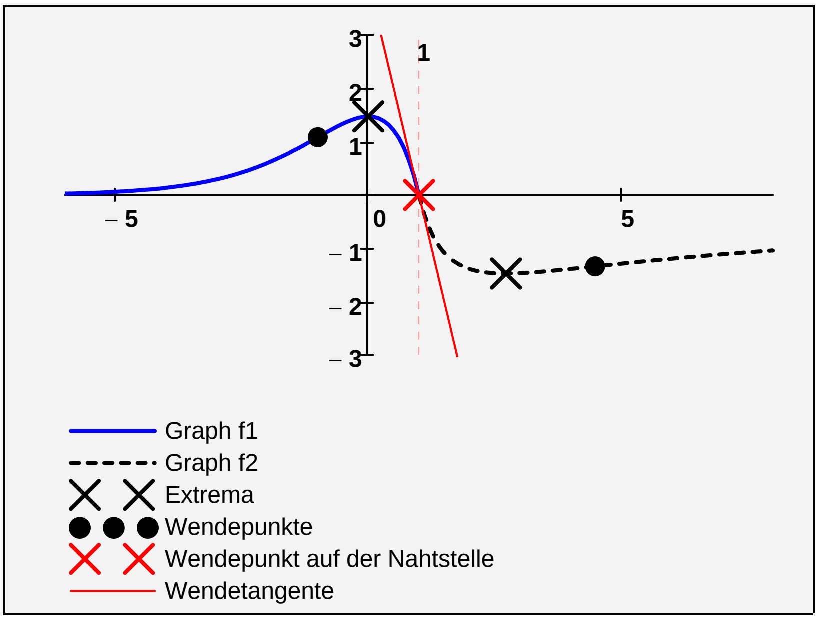
$f''_2(x) = 0 \rightarrow -\frac{8 \cdot \ln(x) - 12}{x^3} = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow e^{\frac{3}{2}}$ $\quad$ einfache Nullstelle

$f\left(\exp\left(\frac{3}{2}\right)\right) = -6 \cdot e^{-\frac{3}{2}} = -1.339$ $\quad \Rightarrow$ **Wendepunkt** $\quad \boxed{WP_2\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{-6}{e^{\frac{3}{2}}}\right)}$

Wendepunkt $x_{W3} := 1$ auf der Nahtstelle (siehe 1.2)

$f(x_{W3}) = 0$ $\quad \boxed{WP_3(1, 0)}$

Teilaufgabe 1.4 **(7 BE)**
Zeichnen Sie den Graphen G_f für $-3 \le x \le 5$ unter Verwendung der gewonnenen Ergebnisse in ein Koordinatensystem (Querformat, Längeneinheit 2 cm). Tragen Sie auch die Tangente bei $x = 1$ ein.



Teilaufgabe 2.0

Nun wird die Funktion $g(x) := \int_1^x f(t)\,dt$ mit $ID_g = IR$ betrachtet.

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)
Zeigen Sie ohne Ausführung der Integration, dass g genau eine Nullstelle hat, und bestimmen Sie die Abszissen der Extrem- und der Wendepunkte sowie die Art der Extrempunkte des Graphen G_g von g. Begründen Sie Ihre Antworten.

$g(1) = 0$, da obere Integrationskonstante = untere Integrationskonstante

$g'(x) = f(x)$ $\Leftrightarrow$ G_g ist streng monoton steigend für $x < 1$ und
G_g ist streng monoton fallend für $x > 1$

$\Rightarrow$ **$(1, 0)$ ist die einzige Nullstelle von g und Maximum**

$g''(x) = f'(x)$ $\Leftrightarrow$ Die Extrema von f (einfache Nullstellen) sind die **Wendepunkte** von g.

$x_1 := 0$ $x_2 := e$