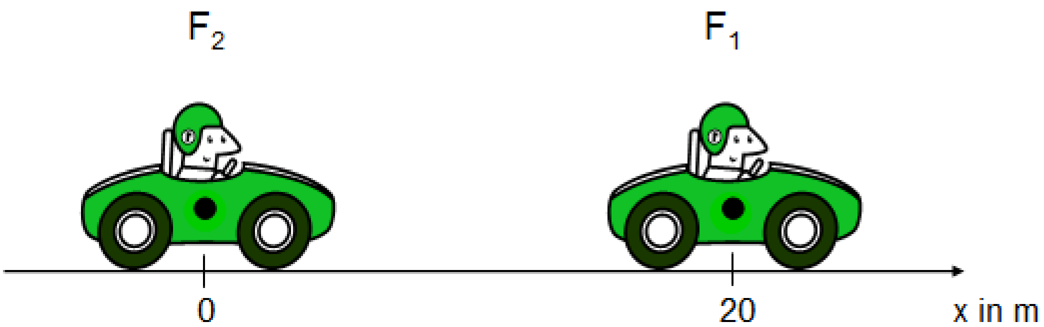
Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2012

- **Physik 12 Technik - Aufgabe III - Lösung**

Teilaufgabe 1.0
Auf einer geradlinigen und horizontal verlaufenden Straße hat sich bei dichtem Verkehr eine Fahrzeugkolonne gebildet. Die Fahrzeuge bewegen sich mit einer konstanten Geschwindigkeit $\vec{v_0}$, die den Betrag $v_0 = 90.0\,\frac{km}{h}$ hat.
Zum Zeitpunkt $t_0 = 0 \cdot s$ befindet sich das Fahrzeug F_1 gerade am Ort mit der x-Koordinate $x_1(0\ s) = 20\ m$ und beginnt ab diesem Zeitpunkt zu bremsen. Die dabei auftretende Verzögerung $\vec{a_1}$ ist konstant und hat den Betrag $a_1 = 4.00\,\frac{m}{s^2}$.
Das Fahrzeug F_2 befindet sich zum Zeitpunkt t_0 am Ort mit der x-Koordinate $x_1(0\ s) = 0\ m$.
Nach einer Reaktionszeit von einer Sekunde, also ab dem Zeitpunkt $t_R = 1.0\ s$ betätigt der Fahrer des Fahrzeugs F_2 die Bremsen. Die Verzögerung $\vec{a_2}$ des Fahrzeugs F_2 ist ebenfalls konstant, hat aber den Betrag $a_2 = 5.00 \cdot \frac{m}{s^2}$.
Die Ortskoordinaten für die beiden Fahrzeuge beziehen sich jeweils auf die Fahrzeugmitte.
Die beiden Fahrzeuge sind gleich lang; die Fahrzeuglängen betragen $l = 4.50 \cdot m$.
Zwischen den Fahrzeugen F_1 und F_2 kommt es zu keinem Auffahrunfall.



Teilaufgabe 1.1 (4 BE)
Das Fahrzeug F_1 kommt zum Zeitpunkt t_1 zum Stillstand, das Fahrzeug F_2 zum Zeitpunkt t_2.
Berechnen Sie die Zeitpunkte t_1 und t_2.
[Teilergebnis: $t_2 = 6.0\ s$]

Gegeben: $v_0 := 90 \cdot \frac{km}{h}$ $\Rightarrow$ $v_0 := 25 \cdot \frac{m}{s}$ $x_{10} := 20 \cdot m$ $a_1 := 4 \cdot \frac{m}{s^2}$

Reaktionszeit: $t_R := 1.0 \cdot s$ $a_2 := 5 \cdot \frac{m}{s^2}$

Fahrzeug 1: $v_1(t) := v_0 - a_1 \cdot t$

Stillstand: $t_1 := v_1(t) = 0 \rightarrow \frac{25 \cdot m}{s} - \frac{4 \cdot m \cdot t}{s^2} = 0 \text{ auflösen}, t \rightarrow \frac{25 \cdot s}{4}$ $\quad t_1 = 6.25\,s$

Fahrzeug 2: $v_2(t) := v_0 - a_2 \cdot (t - t_R)$

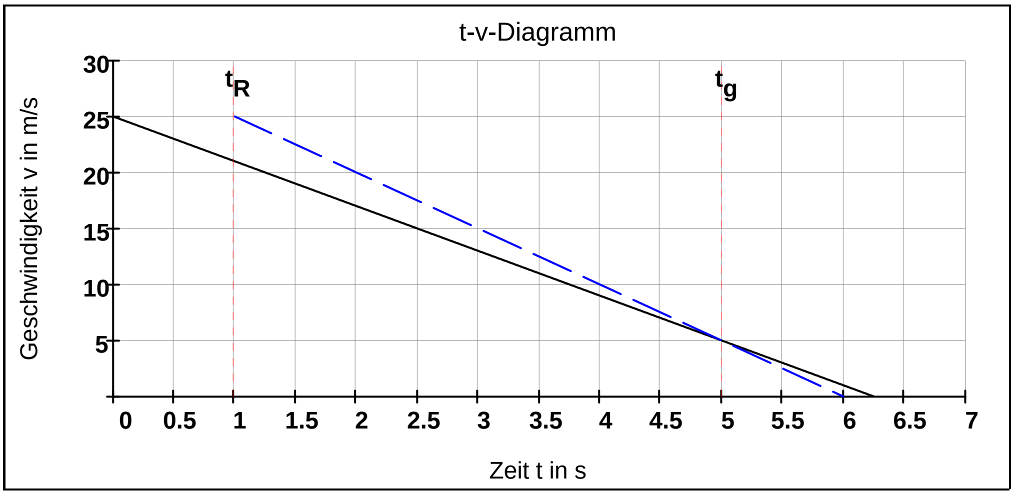
Stillstand: $t_2 := v_2(t) = 0 \rightarrow \frac{25 \cdot m}{s} - \frac{5 \cdot m \cdot (t + -1.0 \cdot s)}{s^2} = 0 \text{ auflösen}, t \rightarrow 6.0 \cdot s$ $\quad t_2 = 6.00\,s$

Teilaufgabe 1.2 **(4 BE)**

v_1 sei der Betrag der Momentangeschwindigkeit $\vec{v_1}$ des Fahrzeugs F_1.

v_2 sei der Betrag der Momentangeschwindigkeit $\vec{v_2}$ des Fahrzeugs F_2.

Stellen Sie in einem t-v-Diagramm den zeitlichen Verlauf von v_1 für $0 \le t \le t_1$ und den zeitlichen Verlauf von v_2 für $0 \le t \le t_2$ dar.



Teilaufgabe 1.3 **(4 BE)**

Zu einem Zeitpunkt t_0, zu dem sich die Fahrzeuge F_1 und F_2 noch bewegen, sind die Geschwindigkeiten $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ gleich groß.

Berechnen Sie den Zeitpunkt t_0.

[Ergebnis: $t_0 = 5.0 \cdot s$, siehe auch t-v-Diagramm]

$$t_g := v_1(t) = v_2(t) \rightarrow \frac{25 \cdot m}{s} - \frac{4 \cdot m \cdot t}{s^2} = \frac{25 \cdot m}{s} - \frac{5 \cdot m \cdot (t + -1.0 \cdot s)}{s^2} \text{ auflösen}, t \rightarrow 5.0 \cdot s$$

$t_g = 5.00\,s$

Teilaufgabe 1.4.1 (5 BE)
Berechnen Sie den Abstand d der beiden Fahrzeugmitten für den Zeitpunkt t_0.
[Ergebnis: $d(t_0) = 10 \cdot m$]

Fahrzeug 1: $x_1(t) := x_{10} + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2$

$$x_1(t) = 20 \cdot m - \frac{2 \cdot m \cdot t^2}{s^2} + \frac{25 \cdot m \cdot t}{s}$$

Fahrzeug 2: $x_2(t) := v_0 \cdot t_R + v_0 \cdot (t - t_R) - \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot (t - t_R)^2$

$$x_2(t) = 25.0 \cdot m - \frac{5 \cdot m \cdot (t + -1.0 \cdot s)^2}{2 \cdot s^2} + \frac{25 \cdot m \cdot (t + -1.0 \cdot s)}{s}$$

Abstand: $d(t) := x_1(t) - x_2(t)$

$$d(t) = 20 \cdot m + -25.0 \cdot m + \frac{5 \cdot m \cdot (t + -1.0 \cdot s)^2}{2 \cdot s^2} - \frac{2 \cdot m \cdot t^2}{s^2} - \frac{25 \cdot m \cdot (t + -1.0 \cdot s)}{s} + \frac{25 \cdot m \cdot t}{s}$$

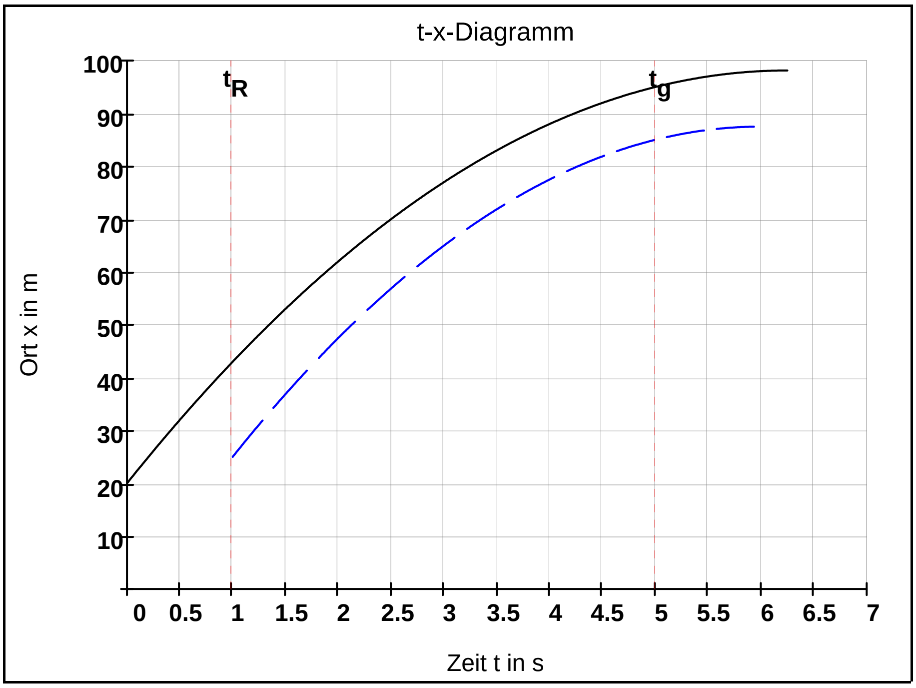
$$d(t_g) = 10\,m$$

Teilaufgabe 1.4.2 (3 BE)
Bestätigen Sie die unter 1.0 aufgestellte Behauptung, dass das Fahrzeug F_2 nicht auf das Fahrzeug F_1 auffährt.

Intervall $t \in [\ 1 \cdot s\ ;\ 5.0 \cdot s\ ]$: Vorsprung von Fahrzeug 1 gegenüber Fahrzeug 2 nimmt ab, da $v_1 < v_2$.

Zum Zeitpunkt $t_g = 5.00 \cdot s$ beträgt der Abstand der Fahrzeigmittelpunkte 10 m, bei einer Länge von jeweils 4,50 m keine Kollision.

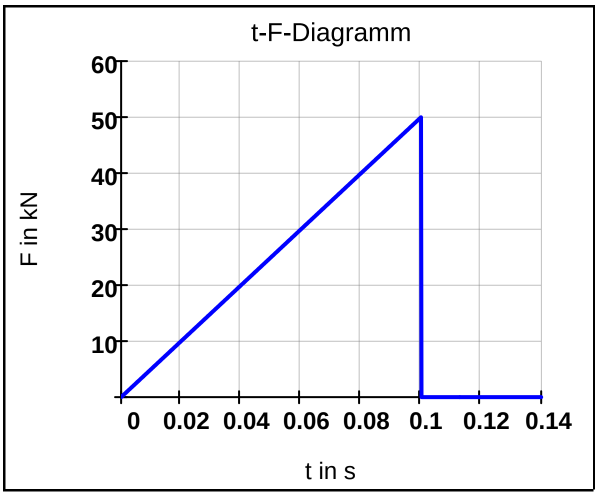
Intervall $t \in [\ 5 \cdot s\ ;\ 6.0 \cdot s\ ]$: Vorsprung von Fahrzeug 1 gegenüber Fahrzeug 2 nimmt zu, da $v_1 > v_2$.



Teilaufgabe 1.5.0

Am Ende der Fahrzeugkolonne rollt ein Auto A_2 antriebslos und stößt mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_A$ zentral auf das vor ihm stehende Auto A_1. Die Bremsen der beiden Fahrzeuge sind gelöst. Das Auto A_1 hat die Masse $m_1 = 1.00 \cdot t$, das Auto A_2 die Masse $m_2 = 1.25 \cdot t$. Reibungskräfte sind zu vernachlässigen. Die Aufprallgeschwindigkeit $\vec{v}_A$ hat den Betrag $v_A = 4.0 \cdot \frac{m}{s}$.

Die Dauer des Stoßes beträgt $\Delta t = 0.10 \cdot s$. Die Kraft $\vec{F}$, die dabei das Auto A_2 auf das Auto A_1 ausübt, hat einen Betrag F, dessen zeitlicher Verlauf im untenstehenden t-F-Diagramm dargestellt ist.



Gegeben:

$m_1 := 1.00 \cdot 10^3 \cdot kg$

$m_2 := 1.25 \cdot 10^3 \cdot kg$

$v_A := 4 \cdot \frac{m}{s}$

$\Delta t := 0.10 \cdot s$

$u_1 := 2.5 \cdot \frac{m}{s}$

Teilaufgabe 1.5.1 (4 BE)

Das Auto A_1 wird durch den Stoß auf die Geschwindigkeit $\vec{u_1}$ beschleunigt.
Bestätigen Sie mithilfe des unter 1.5.0 vorgegebenen t-F-Diagramms, dass die Geschwindigkeit $\vec{u_1}$ den Betrag $u_1 = 2.5 \cdot \frac{m}{s}$ hat.

Auto steht: $v_1 = 0 \cdot \frac{m}{s}$

Kraftstoß = Impulsänderung: $F \cdot \Delta t = \Delta p_1$ $\Delta p_1 = m_1 \cdot (u_1 - v_1)$

Aus der Zeichnung die **mittlere** Kraft: $F_m := \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot N$

Auflösen: $\Rightarrow$ $u_1 := \frac{F_m \cdot \Delta t}{m_1}$ $u_1 := \frac{25 \cdot 10^3 \cdot N \cdot 0.1 \cdot s}{1.00 \cdot 10^3 \cdot kg}$ $u_1 = 2.50 \frac{m}{s}$

Teilaufgabe 1.5.2 (4 BE)

Bestimmen Sie den Betrag und die Richtung der Geschwindigkeit $\vec{u_2}$, die das Auto A_2 unmittelbar nach dem Stoß besitzt.

Impulserhaltungssatz: $m_2 \cdot v_A = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2$

Auflösen: $\Rightarrow$ $u_2 = \frac{m_2 \cdot v_A - m_1 \cdot u_1}{m_2}$

$$u_2 := \frac{1.25 \cdot 10^3 \cdot kg \cdot 4.0 \cdot \frac{m}{s} - 1.00 \cdot 10^3 \cdot kg \cdot 2.5 \cdot \frac{m}{s}}{1.25 \cdot 10^3 \cdot kg} \qquad u_2 = 2.00 \frac{m}{s}$$

Teilaufgabe 2.0

Ein Kondensator mit der Kapazität C wird an einen Spannungsgenerator angeschlossen, der die Wechselspannung $U(t) = U_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ mit dem Scheitelwert U_0 und der Frequenz f liefert.
Der ohmsche Widerstand des Wechselstromkreises ist vernachlässigbar klein.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Ermitteln Sie aus der Gleichung $U(t) = U_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ für den zeitlichen Verlauf der Generatorspannung eine Gleichung für den zeitlichen Verlauf der Stromstärke J im Wechselstromkreis.

Spannung am Kondensator: $U_C(t) = U_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$

Ladung am Kondensator: $Q(t) = C \cdot U(t) = C \cdot U_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$

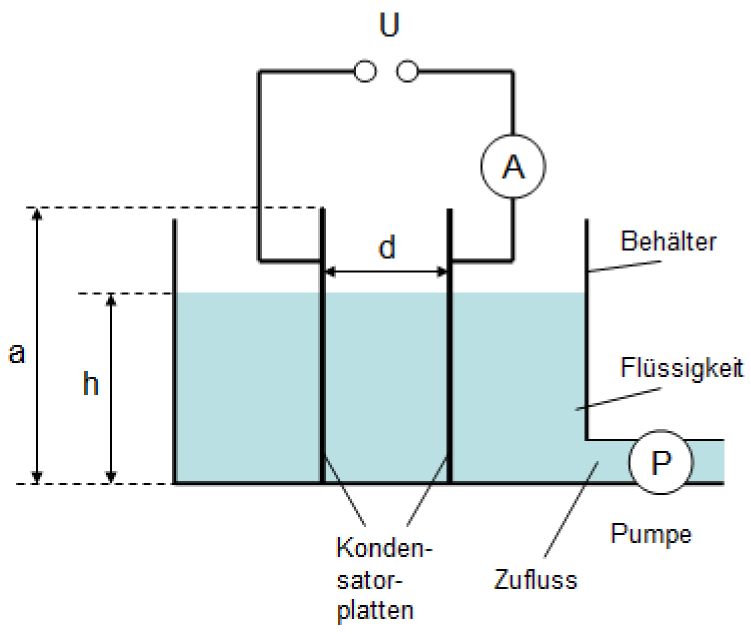
Stromstärke im Wechselstromkreis:

$$J(t) = \frac{d}{dt}Q(t) = C \cdot U_0 \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \quad \Rightarrow \quad J(t) = J_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$

Teilaufgabe 2.2 **(3 BE)**
Zeigen Sie, dass der Effektivwert J_{eff} der Stromstärke J im Wechselstromkreis direkt proportional zur Kapazität C des Kondensators ist.

$$J_{eff} = \frac{J_0}{\sqrt{2}} = \frac{C \cdot U_0 \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}{\sqrt{2}} = \frac{U_0 \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}{\sqrt{2}} \cdot C \qquad \text{mit } k = \frac{U_0 \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}{\sqrt{2}} \cdot C \qquad \Rightarrow \qquad J_{eff} \sim C$$

Teilaufgabe 2.3.0
Die untenstehende Skizze zeigt den prinzipiellen Aufbau einer Vorrichtung zur automatischen Füllstandsregelung. Zur Messung der Füllstandshöhe h einer nicht leitenden Flüssigkeit mit der Dielektrizitätszahl ε_r ($\varepsilon_r > 1$) wird ein Plattenkondensator verwendet. Er besteht aus zwei vertikal aufgestellten quadratischen Metallplatten mit der Seitenlänge $a = 90.0 \cdot cm$. Der Plattenabstand beträgt $d = 15.0 \cdot cm$. Der Raum zwischen den Platten ist bis zur Höhe h mit der Flüssigkeit gefüllt.
Am Kondensator liegt eine sinusförmige Wechselspannung U mit dem Effektivwert $U_{eff} = 30.0 \cdot V$ und der Frequenz $f = 200 \cdot kHz$.



Gegeben:

$$a := 0.9 \cdot m \quad \Rightarrow \quad A_0 := a^2 = 0.81\,m^2 \qquad d := 0.15 \cdot m \qquad U_{eff} := 30.0 \cdot V \qquad f := 200 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{s}$$

Teilaufgabe 2.3.1 (5 BE)
Berechnen Sie die Kapazität C_0 des Kondensators und den Effektivwert $J_{eff,0}$ der Stromstärke J im Wechselstromkreis für den Fall, dass sich keine Flüssigkeit im Behälter befindet.
[Teilergebnis: $C_0 = 47.8 \cdot pF$]

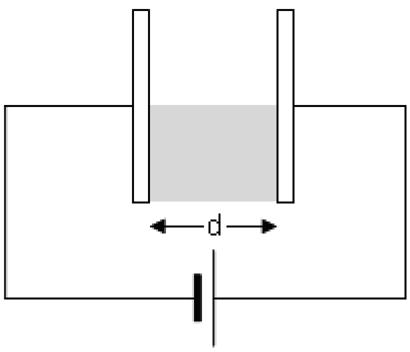
Kapazität: $C_0 = \varepsilon_0 \cdot \frac{A_0}{d}$

$C_0 := 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{A \cdot s}{V \cdot m} \cdot \frac{0.81 \cdot m^2}{0.15 \cdot m}$ $\quad C_0 = 4.781 \times 10^{-11} F$

Stromstärke: $J_{eff0} = \frac{J_0}{\sqrt{2}} = \frac{U_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}{\sqrt{2}} \cdot C_0$

$J_{eff0} := 30.0 \cdot V \cdot 2 \cdot \pi \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{s} \cdot 4.781 \cdot 10^{-11} \cdot F$ $\quad J_{eff0} = 1.8 \times 10^{-3} A$

Teilaufgabe 2.3.2 (5 BE)
Die Kapazität C des bis zur Höhe h mit Flüssigkeit gefüllten Kondensators kann mit folgender Formel berechnet werden: $C = \frac{\varepsilon_0 \cdot a}{d} \cdot \left[a + \left(\varepsilon_r - 1\right) \cdot h\right]$.
Leiten Sie diese Formel her. Erläutern Sie dabei Ihre Ansatzidee.



Kondensator mit Dielektrikum:

$C_r = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{a \cdot h}{d}$

Kondensator ohne Dielektrikum:

$C_{ohne} = \varepsilon_0 \cdot \frac{a \cdot (a - h)}{d}$

Gesamtkapazität bei Parallelschaltung von Kondensatoren:

$$C = C_r + C_{ohne} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{a \cdot h}{d} + \varepsilon_0 \cdot \frac{a \cdot (a - h)}{d}$$

Ausklammern: $C = \varepsilon_0 \cdot \frac{a}{d} \cdot \left(\varepsilon_r \cdot h + a - h\right) = \varepsilon_0 \cdot \frac{a}{d} \cdot \left[a + h \cdot \left(\varepsilon_r - 1\right)\right]$

Teilaufgabe 2.3.3 (3 BE)
Begründen Sie, dass der Effektivwert J_{eff} der Stromstärke J anwächst, wenn die Flüssigkeit in den Behälter eingefüllt wird.

Mit steigender Höhe h wird die Kapazität C größer.

Die Effektivstromstärke wird mit wachsender Kapazität größer.

$\Rightarrow$ Die Effektivstromstärke wird größer mit steigender Höhe h.

Teilaufgabe 2.3.4 (3 BE)
Die Pumpe am Zufluss zum Behälter soll abgeschaltet werden, sobald die Füllhöhe h den Wert $h_{max} = 85 \cdot cm$ erreicht. Die Dielektrizitätszahl der Flüssigkeit beträgt $\varepsilon_r = 2.70$.
Berechnen Sie für diesen Fall den Effektivwert J_{eff} der Stromstärke J.

Gegeben: $h_{max} := 0.85 \cdot m$ $\quad \varepsilon_r := 2.70$

$$J_{eff} = U_{eff} \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C = U_{eff} \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \left[\varepsilon_0 \cdot \frac{a}{d} \cdot \left[a + h_{max} \cdot (\varepsilon_r - 1)\right]\right]$$

$$J_{eff} := 30 \cdot V \cdot 2 \cdot \pi \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{s} \cdot \left[8.854 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{A \cdot s}{V \cdot m} \cdot \frac{0.9 \cdot m}{0.15 \cdot m} \cdot [0.9 \cdot m + 0.85 \cdot m \cdot (2.70 - 1)]\right]$$

$$J_{eff} = 4.70\,mA$$