Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2012

• Mathematik 12 Nichttechnik - A I - Lösung

Teilaufgabe 1.0

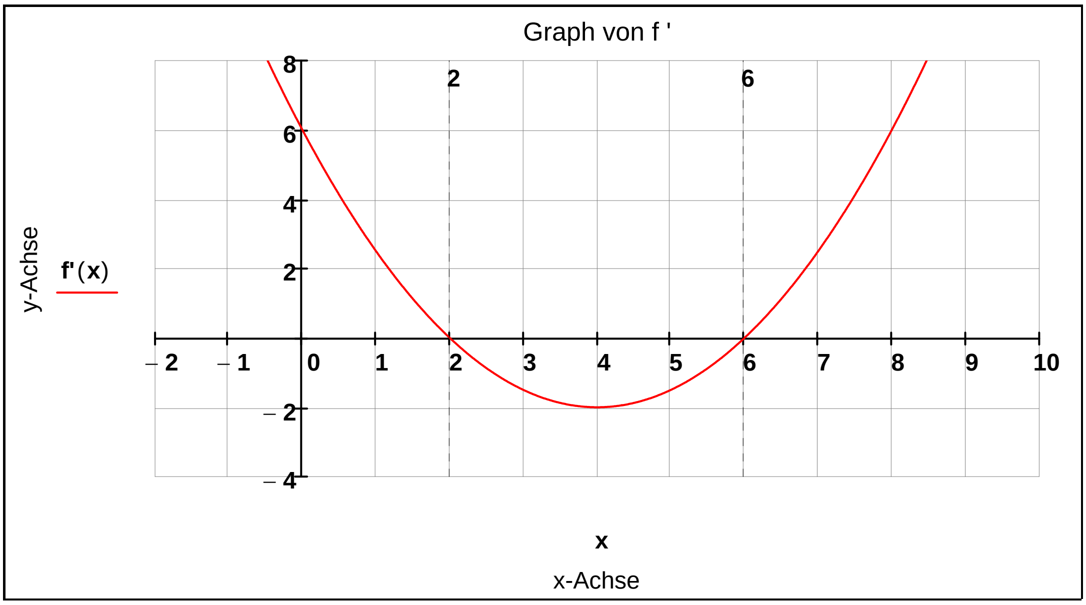
f sei eine ganzrationale Funktion mit der Ableitungsfunktion $f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(x-6)\cdot(x-2)$ und

$D_{f'} = D_f = IR$.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Geben Sie die Nullstellen der Funktion f' an, skizzieren Sie den Graphen von f' und ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-6)\cdot(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 6 \qquad x_2 = 2$$



G_f ist im Intervall $]-\infty\ ;\ 2]$ streng monoton steigend,

G_f ist im Intervall $[\ 2\ ;\ 6\ ]$ streng monoton fallend,

G_f ist im Intervall $[\ 6\ ;\ \infty\ ]$ streng monoton steigend.

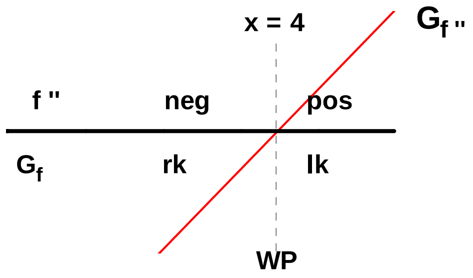
Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle des Graphen G_f.

Ausmultiplizieren: $f'(x) := \frac{1}{2}\cdot\left(x^2 - 8\cdot x + 12\right)$

2. Ableitung: $f''(x) := \frac{1}{2}\cdot(2\cdot x - 8)$

$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cdot x - 8 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 4$



G_f ist rechtsgekrümmt in $]-\infty\,;\,4]$
und
G_f ist inksgekrümmt in $[\,4\,;\,\infty[$

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)
Der Graph G_f enthält den Punkt A/3/0). Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$ der Funktion f.

[Mögliches Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{6}\cdot\left(x^3 - 12\cdot x^2 + 36\cdot x - 27\right)$

$$f(x,c) := \int \frac{1}{2}\cdot\left(x^2 - 8\cdot x + 12\right) dx + c \qquad f(x,c) = \frac{x^3 - 12\cdot x^2 + 36\cdot x + 6\cdot c}{6}$$

$A \in G_f$: $\quad c_1 := f(3,c) = 0 \rightarrow c + \frac{9}{2} = 0 \text{ auflösen}, c \rightarrow -\frac{9}{2}$

$$f(x) := \frac{1}{6}\cdot\left(x^3 - 12\cdot x^2 + 36\cdot x - 27\right)$$

Teilaufgabe 1.4 (6 BE)
Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit Vielfachheit. Runden Sie gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen.
[Teilergebnis: $x_3 \approx 7.85$]

Polynomdivision: $\quad p(x) := \frac{x^3 - 12\cdot x^2 + 36\cdot x - 27}{x - 3} = x^2 - 9\cdot x + 9$

$$p(x) = 0 \rightarrow x^2 - 9\cdot x + 9 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3\cdot\sqrt{5}}{2} + \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} - \frac{3\cdot\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.85 \\ 1.15 \end{pmatrix}$$

drei einfache Nullstellen: $\quad x_1 := 3 \qquad x_2 := \frac{9}{2} - \frac{3\cdot\sqrt{5}}{2} = 1.15 \qquad x_3 := \frac{9}{2} + \frac{3\cdot\sqrt{5}}{2} = 7.85$

Teilaufgabe 1.5 (4 BE)
Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen G_f.

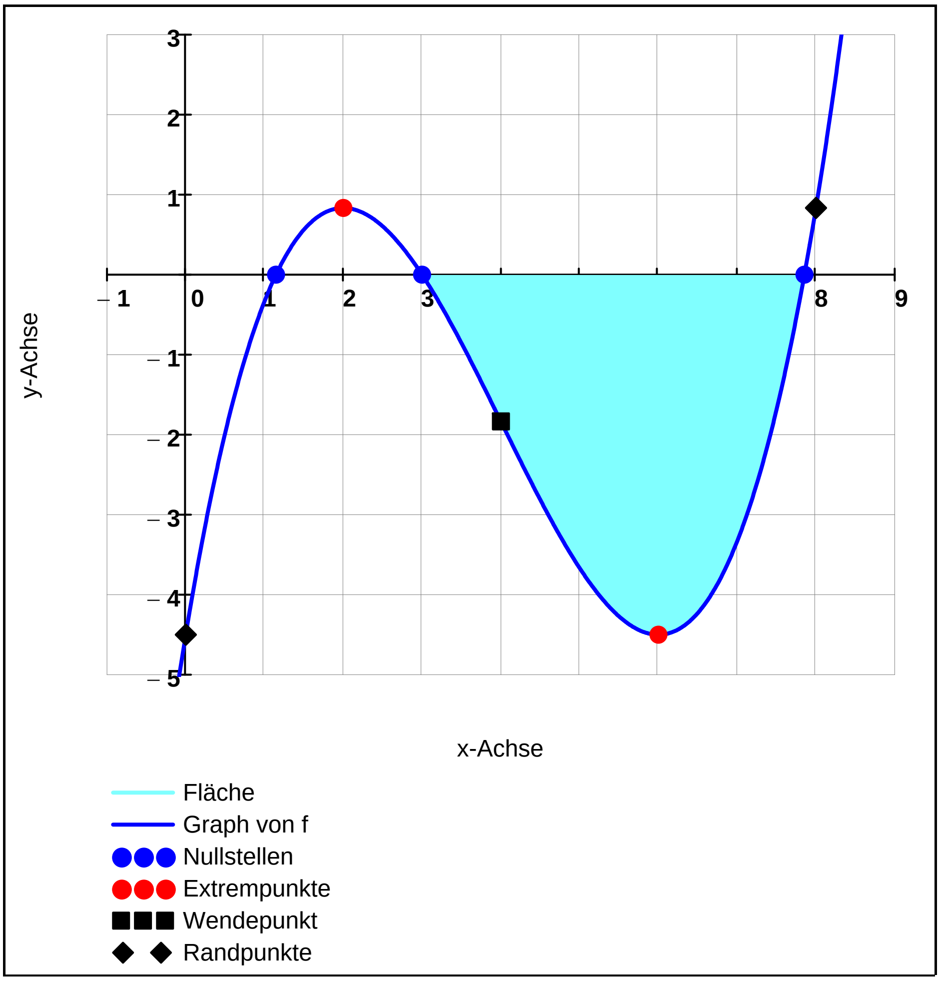
Aus 1.1: $f(2) = \frac{5}{6} = 0.83$ Hochpunkt: **HP(2 / 0,83)**

$f(6) = -\frac{9}{2} = -4.5$ Tiefpunkt: **TP(6 / -4,5)**

$f(4) = -\frac{11}{6} = -1.833$ Wendepunkt: **WP(4 / -1,83)**

Teilaufgabe 1.6 (4 BE)
Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $0 \le x \le 8$ unter Verwendung vorliegender Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem.

$f(0) = -4.5$ $f(8) = \frac{5}{6} = 0.83$



Teilaufgabe 1.7 (5 BE)
Der Graph G_f und die x-Achse begrenzen im vierten Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Flächenberechnung: $$A := -\int_{3}^{7.85} \frac{1}{6}\cdot\left(x^3 - 12\cdot x^2 + 36\cdot x - 27\right) dx$$

Stammfunktuion: $$F(x) := \int \frac{1}{6}\cdot\left(x^3 - 12\cdot x^2 + 36\cdot x - 27\right) dx$$

$$F(x) := \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{x^4}{4} - 4\cdot x^3 + 18\cdot x^2 - 27\cdot x\right)$$

$F(7.85) = -14.726$ $\qquad$ $F(3) = -1.125$

$A := -(F(7.85) - F(3))$ $\qquad$ $A = 13.60$

Teilaufgabe 2.0
Gegeben sind die Funktionen $g_a(x) = \frac{1}{6}\cdot x\cdot(x - a)^2$ mit $D_{g_a} = \mathrm{IR}$ und $a \in \mathrm{IR}$.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)
Geben Sie in Abhängigkeit von a Lage und Vielfachheit der Nullstellen der Funktion g_a an.

$$g(x, a) := \frac{1}{6}\cdot x\cdot(x - a)^2$$

Nullstellen: $$g(x, a) = 0 \rightarrow \frac{x\cdot(a - x)^2}{6} = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

1. Fall:	$a \neq 0$	$x_1 = 0$	einfache Nullstelle
		$x_2 = a$	zweifache Nullstelle
2. Fall:	$a = 0$	$x_1 = 0$	dreifache Nullstelle

Teilaufgabe 2.2 (8 BE)
Berechnen Sie in Abhängigkeit von a diejenigen Stellen, an denen die Graphen der Funktionen f (aus 1.3) und g_a gleiche Steigung besitzen.

$$g_a(x) = \frac{1}{6} \cdot x \cdot (x - a)^2 = \frac{1}{6} \cdot \left(x^3 - 2 \cdot a \cdot x^2 + a^2 \cdot x\right)$$

$$g'_a(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(3 \cdot x^2 - 4 \cdot a \cdot x + a^2\right) \qquad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 - 8 \cdot x + 12\right)$$

Ansatz: $\frac{1}{6} \cdot \left(3 \cdot x^2 - 4 \cdot a \cdot x + a^2\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 - 8 \cdot x + 12\right)$

$$3 \cdot x^2 - 4 \cdot a \cdot x + a^2 = 3 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 36$$

$$(24 - 4 \cdot a) \cdot x = 36 - a^2$$

Sei $24 - 4 \cdot a \neq 0$. $\Leftrightarrow$ für $a \neq 6$ gilt: $x = \frac{36 - a^2}{24 - 4 \cdot a} = \frac{(6 + a) \cdot (6 - a)}{4 \cdot (6 - a)} = \frac{6 + a}{4}$

für $a = 6$ gilt: $0 \cdot x = 0$ gültig für alle $x \in IR$

Teilaufgabe 2.3 (2 BE)
Erläutern Sie für $a = 6$ den Zusammenhang der Graphen von f und g_6.

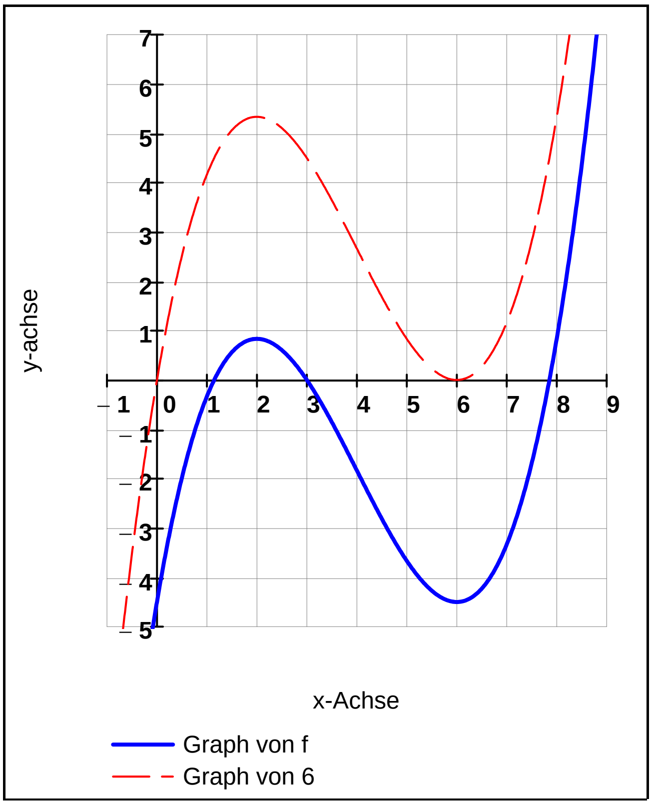
$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(x^3 - 12 \cdot x^2 + 36 \cdot x - 27\right) \qquad g_6(x) = \frac{1}{6} \cdot x \cdot (x - 6)^2 = \frac{1}{6} \cdot \left(x^3 - 12 \cdot x^2 + 36 \cdot x\right)$$

$$f(0) = -\frac{27}{6} \qquad g_6(0) = 0$$

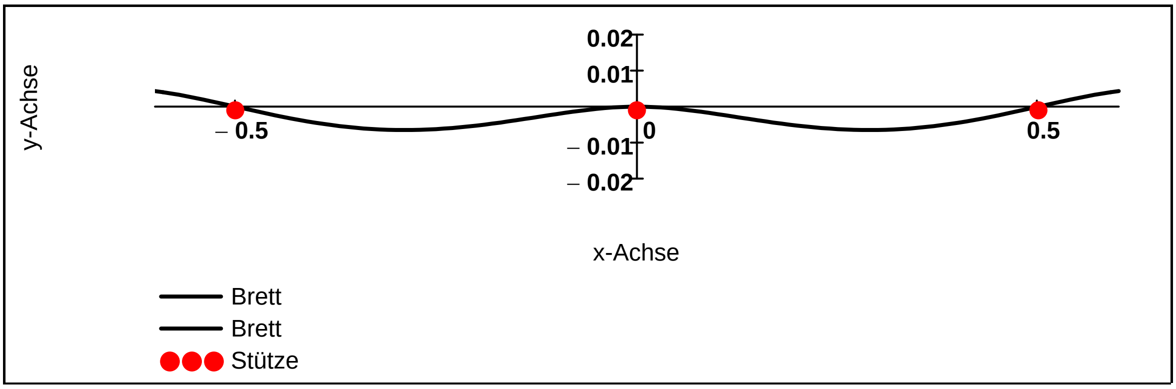
G_{g_6} geht aus G_f durch Verschiebung y-Richtung um $-\frac{27}{6}$ hervor.

Graphische Darstellung in der Prüfung nicht verlangt.

$$f(x) := \frac{1}{6}\cdot\left(x^3 - 12\cdot x^2 + 36\cdot x - 27\right) \qquad g_6(x) := \frac{1}{6}\cdot\left(x^3 - 12\cdot x^2 + 36\cdot x\right)$$



Teilaufgabe 3.0
Das Brett eines Bücherregals liegt auf drei Stützen, die jeweils einen Abstand von 0,5 m haben und sich auf gleicher Höhe befinden. Belastet man das Brett gleichmäßig mit Büchern, so biegt es sich durch (vgl. Skizze).



Die Unterkante des Brettes kann im Bereich $D_{u_k} = [\,0\,;\ 0.5\,]$ als Graph der Funktion

$u_k(x) = k \cdot \left(10 \cdot x^3 - 8 \cdot x^4 - 3 \cdot x^2\right)$ aufgefasst werden, wobei $k \in IR^+$ vom Brett und der Belastung abhängt. $u_k(x)$ und x werden in Metern gemessen.
Runden Sie bei folgenden Berechnungen der Aufgabengruppe 3 die Ergebnisse auf 4 Stellen nach dem Komma. Auf die Mitführung von Einheiten wird verzichtet.

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)
Ermitteln Sie die Stelle x_E, für die die größte Durchbiegung des Brettes im Bereich D_{u_k} vorliegt.

[Ergebnis: $x_E \approx 0.2892$]

$$u(x,k) := k \cdot \left(10 \cdot x^3 - 8 \cdot x^4 - 3 \cdot x^2\right)$$

Ableitungsfunktion: $u'(x,k) = k \cdot \left(30 \cdot x^2 - 32 \cdot x^3 - 6 \cdot x\right)$

Horizontale Tangenten:

$$30 \cdot x^2 - 32 \cdot x^3 - 6 \cdot x = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{33}}{32} + \frac{15}{32} \\ \frac{15}{32} - \frac{\sqrt{33}}{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6483 \\ 0.2892 \end{pmatrix}$$ nicht definiert

Funktionwerte: $u(0,k) = 0$

$u(0.2892, k)$ Gleitkommazahl, 4 $= -0.06499 \cdot k$

relatives und absolutes Minimum $x_E = 0.2892$

Rechter Rand: $u\left(\frac{1}{2}, k\right) = 0$

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)
Berechnen Sie den Wert für k so, dass die größte Durchbiegung zwei Millimeter beträgt.

Bedingung: $0.0649 \cdot k = 0.002 \;\left|\begin{array}{l}\text{auflösen}, k \\ \text{Gleitkommazahl}, 4\end{array}\right. \rightarrow 0.03082$

Teilaufgabe 4.0
Nun wird das Brett aus Aufgabe 3 im Bereich $-0.5 \le x \le 0.5$ betrachtet. Die Unterkante des Regalbretts wird jetzt durch den Graphen einer abschnittsweise definierten Funktion h beschrieben mit $h(x) = \left|\begin{array}{l} v(x) \quad \text{if} \quad -0.5 \le x < 0 \\ 0.1 \cdot \left(10 \cdot x^3 - 8 \cdot x^4 - 3 \cdot x^2\right) \quad \text{if} \quad 0 \le x \le 0.5 \end{array}\right.$
Wenn das Brett gleichmäßig belastet ist, ist der Graph der Funktion h symmetrisch zur y-Achse und ferner ist h an der Stelle $x_0 = 0$ stetig.

Teilaufgabe 4.1 (3 BE)
Ermitteln Sie unter obigen Bedingungen v(x). Ihre Vorgehensweise muss durch Rechnung erkennbar sein oder verbal begündet werden.

h ist achsensymmetrisch, also muss der Faktor identisch sein. Damit $h(-x) = h(x)$ gelten kann, muss bei der ungeraden Potenz von x ein Minus gesetzt werden.

$$v(x) := 0.1 \cdot \left(-10 \cdot x^3 - 8 \cdot x^4 - 3 \cdot x^2\right)$$

Teilaufgabe 4.2 (4 BE)
Bestimmen Sie $\lim_{x \to 0^+} h'(x)$ und begründen Sie, ob die Funktion h an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

$$\left|\begin{array}{l} \left[0.1 \cdot \left(-30 \cdot x^2 - 32 \cdot x^3 - 6 \cdot x\right)\right] \quad \text{if} \quad -0.5 \le x < 0 \\ \left[0.1 \cdot \left(30 \cdot x^2 - 32 \cdot x^3 - 6 \cdot x\right)\right] \quad \text{if} \quad 0 \le x \le 0.5 \end{array}\right.$$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to 0^+} \left[0.1 \cdot \left(30 \cdot x^2 - 32 \cdot x^3 - 6 \cdot x\right)\right] \rightarrow 0$

Wegen der Symmetrie muss der linksseitige Grenzwert mit dem rechtsseitigen übereinstimmen.

$$\lim_{x \to 0^-} \left[0.1 \cdot \left(-30 \cdot x^2 - 32 \cdot x^3 - 6 \cdot x\right)\right] \rightarrow 0$$

G_h ist ohne Sprungstelle (stetig) und glatt, also differenzierbar