Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2012

- **Mathematik 12 Nichttechnik - A II - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = \frac{1}{24}\cdot x^4 + \frac{1}{3}\cdot x^3 + x^2$ mit $D_f = IR$.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)
Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen und deren Vielfachheit.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{24}\cdot x^4 + \frac{1}{3}\cdot x^3 + x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{24}\cdot x^2\cdot\left(x^2 + 8\cdot x + 24\right) = 0$$

$x_{12} = 0$ oder $x^2 + 8\cdot x + 24 = 0$ **auflösen, x** $\rightarrow \begin{pmatrix} -4 + 2i\cdot\sqrt{2} \\ -4 - 2i\cdot\sqrt{2} \end{pmatrix}$ keine Nullstellen

doppelte Nullstelle: $x_{12} = 0$

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)
Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f und ermitteln Sie Art und Koordinaten des relativen Extempunktes von G_f.

$$f'(x) := \frac{1}{6}\cdot x^3 + x^2 + 2\cdot x$$

Horizontale Tangenten:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{6}\cdot x^3 + x^2 + 2\cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot x^2 + x + 2\right) = 0$$

$x_{h1} = 0$ oder $\frac{1}{6}\cdot x^2 + x + 2 = 0$ **auflösen, x** $\rightarrow \begin{pmatrix} -3 + \sqrt{3}\cdot i \\ -3 - \sqrt{3}\cdot i \end{pmatrix}$ keine Nullstellen

Monotonietabelle: $\frac{1}{6}\cdot x^2 + x + 2 > 0$ für alle $x \in IR$

Das Vorzeichen von **f'** wird bestimmt durch das Vorzeichen von x.

$\Rightarrow$ G_f ist streng monoton fallend für $x \in \left]-\infty\,;\,0\right]$ und streng monoton steigend für $x \in \left[0\,;\,\infty\right[$.

$f(0) = 0 \quad \Rightarrow$ rel. Tiefpunkt **TP(0 / 0)**

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)
Untersuchen Sie den Graphen von f auf Wendepunkte.

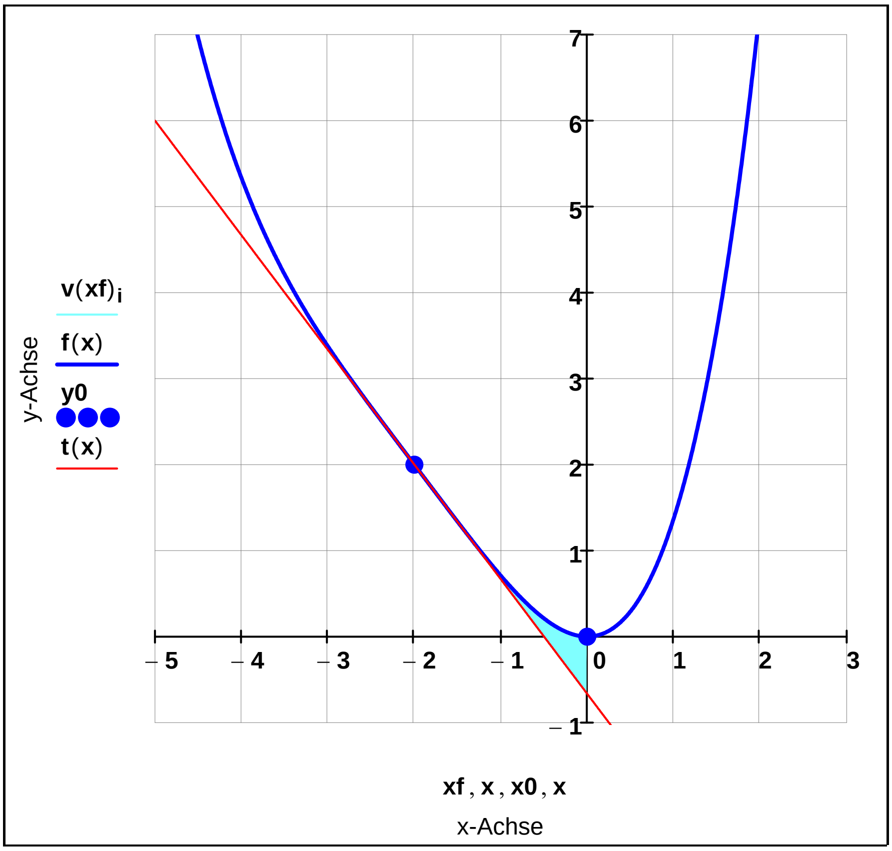
$$f''(x) := \frac{1}{2}\cdot x^2 + 2\cdot x + 2$$

$f''(x) = 0$ $\quad \frac{1}{2}\cdot x^2 + 2\cdot x + 2 = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ keine Lösungen

$x_{12} = -2$ $\quad$ doppelte Nullstelle $\quad \Rightarrow \quad G_f$ besitzt keinen Wendepunkt

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)
Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $-4 \le x \le 2$ unter Verwendung vorliegender Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem.

$$f(x) := \frac{1}{24}\cdot x^4 + \frac{1}{3}\cdot x^3 + x^2$$



xw =	f(xw) =
-4	5.3
-3	3.4
-2	2.0
-1	0.7
0	0.0
1	1.4
2	7.3

Teilaufgabe 1.5 (4 BE)

Zeigen Sie, dass die Gerade G_t beschrieben durch den Funktionsterm $t(x) = -\frac{4}{3} \cdot x - \frac{2}{3}$

mit $D_t = \mathbb{R}$, Tangente an G_f im Punkt $P(-2 / y_P)$ ist.

Zeichnen Sie die Tangente in das vorhandene Koordinatensystem ein.

$y_P := f(-2) = 2$

Steoigung in P: $m_P := f'(-2) = -\frac{4}{3}$

Punkt-Steigungsform: $t(x) := m_P \cdot (x + 2) + f(-2)$

$t(x) = -\frac{4 \cdot x}{3} - \frac{2}{3}$

Teilaufgabe 1.6 (5 BE)

Die Tangente G_t der Graph G_f und die y-Achse schließen ein endliches Flächenstück ein.

Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts.

Differenzfunktion: $f(x) - t(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{4 \cdot x}{3} + \frac{2}{3}$

Stammfunktion: $\int (f(x) - t(x))\, dx = \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + \frac{2 \cdot x^2}{3} + \frac{2 \cdot x}{3}$

Flächeninhalt: $A := \int_{-2}^{0} (f(x) - t(x))\, dx$ $\qquad A = \frac{4}{15} = 0.27$

Teilaufgabe 2.0

Gegeben sind die reellen Funktionen

$g_a(x) = \frac{1}{24} \cdot \left[x^4 + (6 \cdot a - 4) \cdot x^3 + \left(12 \cdot a^2 - 12 \cdot a\right) \cdot x^2\right]$ mit $D_{g_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Untersuchen Sie in Abhängigkeit von a das Symmetrieverhalten von G_{g_a} bzgl. des Koordinatensystems.

Keine Punktsymmetrie möglich, da bei x^4 kein Parameter vorkommt, x^4 also nicht wegfällt.

$6 \cdot a - 4 = 0$ **auflösen**, $a \rightarrow \frac{2}{3}$

für $a = \frac{2}{3}$ $\quad g_0(x) = \frac{1}{24} \cdot \left[x^4 + \left(12 \cdot a^2 - 12 \cdot a\right) \cdot x^2\right]$ $\quad G_{g_0}$ achsensymmetrisch zur y-Achse

Teilaufgabe 2.2 (7 BE)
Berechnen Sie, für welche Werte von a die Funktion g_a genau eine Nullstelle besitzt.

$g_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 + (6 \cdot a - 4) \cdot x^3 + \left(12 \cdot a^2 - 12 \cdot a\right) \cdot x^2 = 0$

Ausklammern: $\quad x^2 \cdot \left[x^2 + (6 \cdot a - 4) \cdot x + \left(12 \cdot a^2 - 12 \cdot a\right)\right] = 0$

eine feste Nullstelle: $\quad x_{12} = 0$

oder: $\quad x0(a) := x^2 + (6 \cdot a - 4) \cdot x + \left(12 \cdot a^2 - 12 \cdot a\right) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{4 - 3 \cdot a^2} - 3 \cdot a + 2 \\ 2 - \sqrt{4 - 3 \cdot a^2} - 3 \cdot a \end{pmatrix}$

Abrufen der Nullstellen:

$x_1(a) = 2 - \sqrt{4 - 3 \cdot a^2} - 3 \cdot a \qquad x_2(a) = \sqrt{4 - 3 \cdot a^2} - 3 \cdot a + 2$

Genau eine Nullstelle, wenn die Diskriminante Null ist:

$4 - 3 \cdot a^2 = 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \\ -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$ keine Lösung, da a > 0

$x_1\left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right) = 2 - 2 \cdot \sqrt{3} \qquad x_2\left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right) = 2 - 2 \cdot \sqrt{3}$

Die doppelte Nullstelle kann nicht mit der festen Nullstelle übereinstimmen.

Keine weiteren Nullstellen, wenn die Diskriminante kleiner Null ist.

$4 - 3 \cdot a^2 < 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow a < -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \vee \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} < a \quad \Rightarrow \quad a > \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$

Teilaufgabe 2.3 (3 BE)
Zeigen Sie, dass der Graph G_{g_a} unabhängig von a bei $x = 0$ die x-Achse als Tangente besitzt.

$$g'_a(x) = \frac{1}{24}\cdot\left[4\cdot x^3 + (6\cdot a - 4)\cdot 3\cdot x^2 + \left(12\cdot a^2 - 12\cdot a\right)\cdot 2\cdot x\right]$$

$$g'_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\cdot x^3 + (6\cdot a - 4)\cdot 3\cdot x^2 + \left(12\cdot a^2 - 12\cdot a\right)\cdot 2\cdot x = 0$$

Ausklammern: $x\cdot\left[12\cdot x^2 + (6\cdot a - 4)\cdot 6\cdot x + \left(12\cdot a^2 - 12\cdot a\right)\cdot 2\right] = 0$

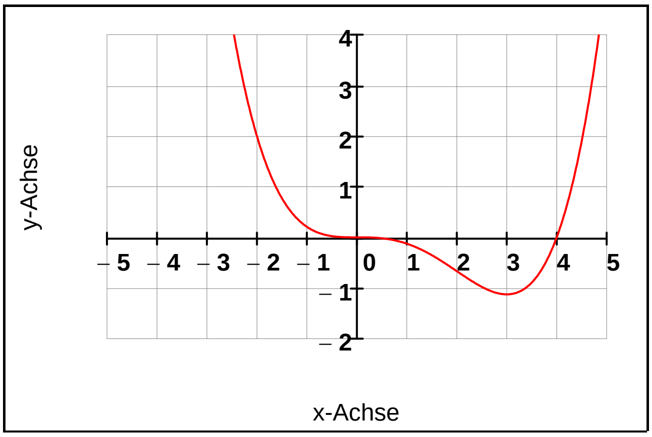
$x = 0$ ist eine von a unabhängige Nullstelle.

$$12\cdot x^2 + (6\cdot a - 4)\cdot 6\cdot x + \left(12\cdot a^2 - 12\cdot a\right)\cdot 2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -a \\ 2 - 2\cdot a \end{pmatrix}$$

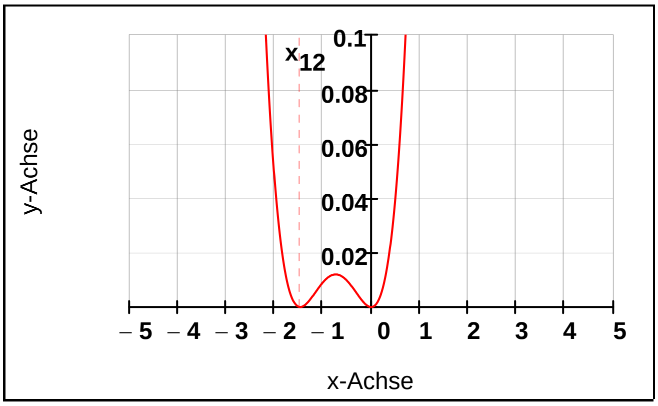
Für $a = 0$ existiert eine weitere horizontale Tangente $x = 0$.

Darstellung der Kurvenschar in der Pürunf nicht verlangt.

$$g(x, a) := \frac{1}{24}\cdot\left[x^4 + (6\cdot a - 4)\cdot x^3 + \left(12\cdot a^2 - 12\cdot a\right)\cdot x^2\right]$$



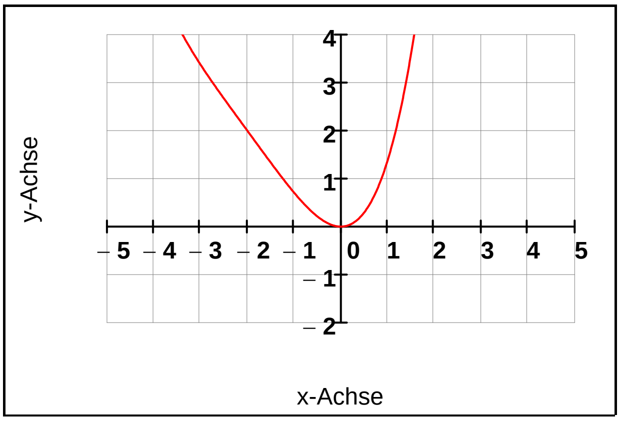
$$g(x, 0) = \frac{x^3\cdot(x - 4)}{24}$$



$$g\left(x, \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{x^2\cdot\left(x + 2\cdot\sqrt{3} - 2\right)^2}{24}$$

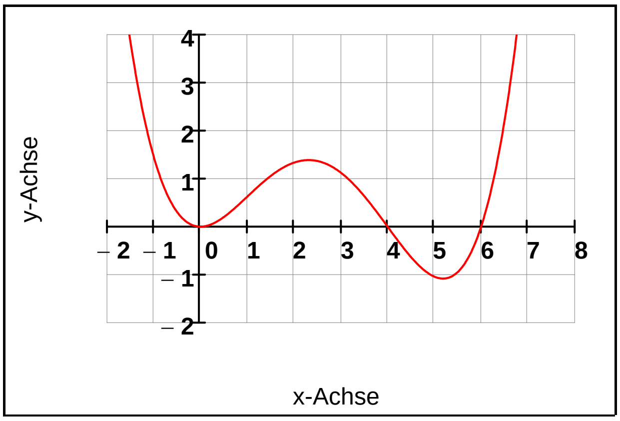
$x_{12} = -1.464$

$x_{34} = 0$



$$g(x,2) = \frac{x^2 \cdot \left(x^2 + 8 \cdot x + 24\right)}{24}$$

$x_{12} = 0$

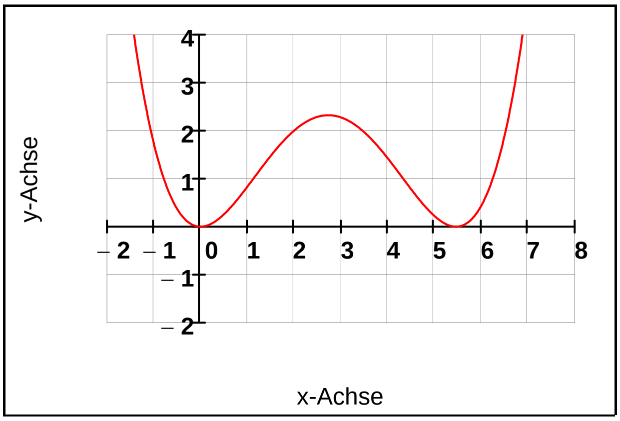


$$g(x,-1) = \frac{x^2 \cdot (x-4) \cdot (x-6)}{24}$$

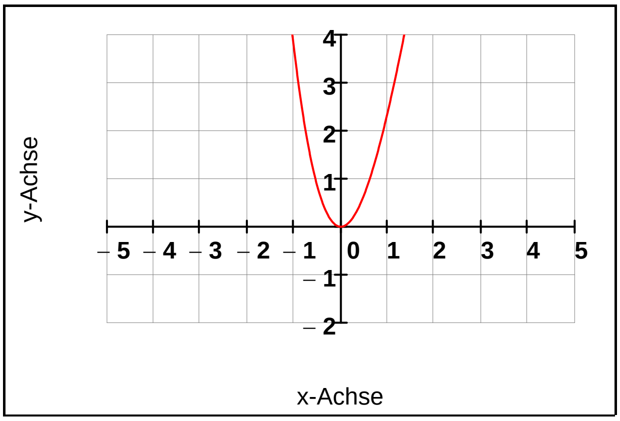
$x_{12} := 0$

$x_3 := 4$

$x_4 := 6$

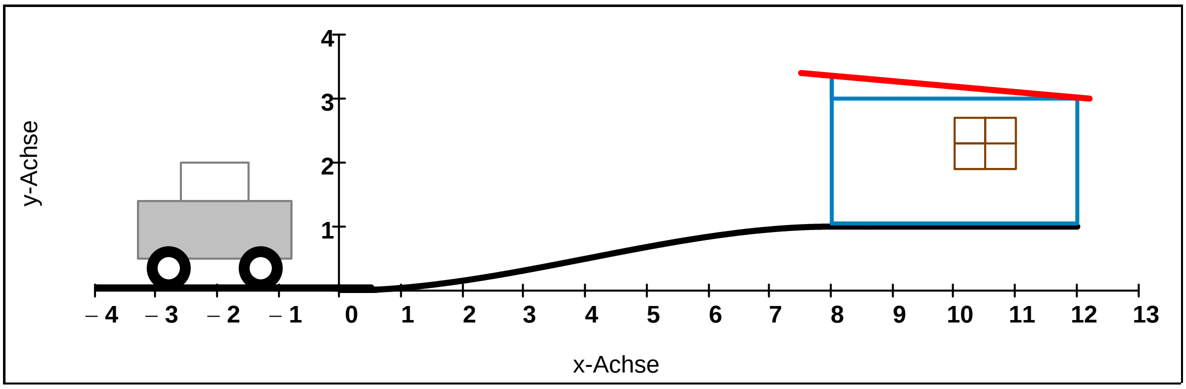


$$g\left(x, -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right) = \frac{x^2 \cdot \left(x - 2 \cdot \sqrt{3} - 2\right)^2}{24}$$



$$g(x,-2) = \frac{x^2 \cdot \left(x^2 - 16 \cdot x + 72\right)}{24}$$

Teilaufgabe 3.0
Eine Garage liegt 1 m über dem Straßenniveau. Die Zufahrt soll so gestaltet werden, dass sie *glatt* (d. h. ohne Knick) an die Straße und die Grarage anschließt (siehe Skizze). Alle An
sind in Meter. Bei den folgenden Rechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden.



Teilaufgabe 3.1 **(7 BE)**
Der Querschnitt der Auffahrtsrampe wird durch eine ganzrationale Funktion t dritten Grades, eingeschränkt auf den Definitionsbereich $0 \le x \le 8$, beschreiben.
Ermitteln Sie den Funktionsterm $r(x)$.

[Ergebnis: $r(x) = -\frac{1}{256}\cdot x^3 + \frac{3}{64}\cdot x^2$]

$r(x,a,b,c,d) := a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$ $\qquad$ $r'(x,a,b,c,d) := 3\cdot a\cdot x^2 + 2\cdot b\cdot x + c$

$(0\,/\,0) \in G_r$: $\qquad r(0,a,b,c,d) = 0 \rightarrow d = 0$

$(8\,/\,1) \in G_r$: $\qquad r(8,a,b,c,d) = 1 \rightarrow 512\cdot a + 64\cdot b + 8\cdot c + d = 1$

$r'(0) = 0$ $\qquad r'(0,a,b,c,d) = 0 \rightarrow c = 0$

$r'(8) = 0$ $\qquad r'(8,a,b,c,d) = 0 \rightarrow 192\cdot a + 16\cdot b + c = 0$

Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} d = 0 \\ 512\cdot a + 64\cdot b + 8\cdot c + d = 1 \\ c = 0 \\ 192\cdot a + 16\cdot b + c = 0 \end{pmatrix} \text{auflösen}, a, b, c, d \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{256} & \frac{3}{64} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abrufen der Lösungen: $\quad a_0 = -\frac{1}{256} \qquad b_0 = \frac{3}{64} \qquad c_0 = 0 \qquad d_0 = 0$

$$r(x) := -\frac{1}{256}\cdot x^3 + \frac{3}{64}\cdot x^2$$

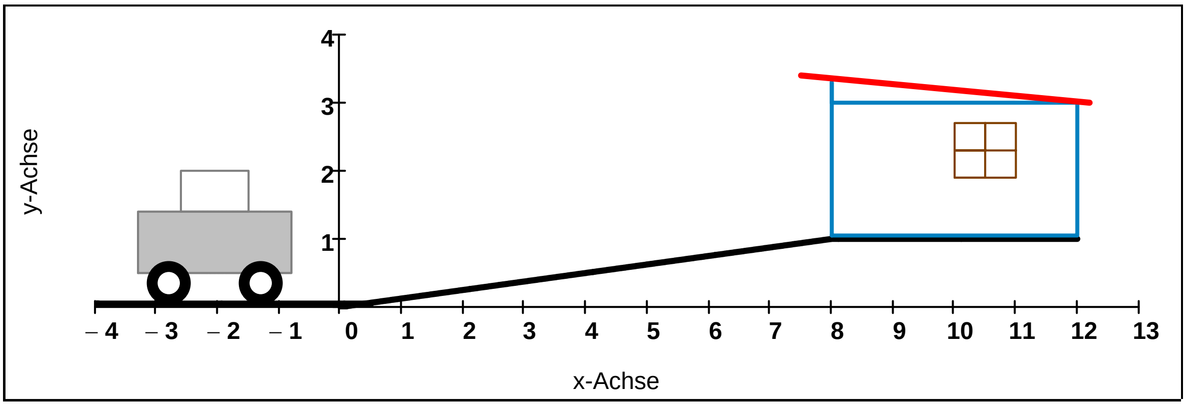
Teilaufgabe 3.2 (5 BE)
Die Rampe soll eine Breite von 3 m bekommen. Berechnen Sie das Volumen des Materials, das hierfür aufgeschüttet werden muss.

Stammfunktion: $\int \left(-\frac{1}{256}\cdot x^3 + \frac{3}{64}\cdot x^2\right) dx = \frac{x^3}{64} - \frac{x^4}{1024}$

Fläche unter dem Graphen: $A := \int_0^8 \left(-\frac{1}{256}\cdot x^3 + \frac{3}{64}\cdot x^2\right) dx$ $\quad A = 4$

Volumen der Aufschütung: $V := A\cdot m^2\cdot 3\cdot m$ $\quad V = 12\,m^3$

Teilaufgabe 3.3.0
Ein Nachbar behauptet, dass die Auffahrt gemäß Teilaufgabe 3.1 ungünstig, weil *zu steil*, sei. Die unten skizziierte Variante sei besser.



Teilaufgabe 3.3.1 (6 BE)
Bestimmen Sie denjenigen Bereich der Auffahrt (x-Werte), in dem die Behauptung des Nachbarn richtig ist, d. h. die Rampe aus Teilaufgabe 3.1 steiler ist als beim Vorschlag des Nachbarn. Runden Sie dabei auf eine Nachkommastelle.

1. Ableitung: $r'(x) := \frac{d}{dx}r(x) = \frac{3\cdot x}{32} - \frac{3\cdot x^2}{256}$

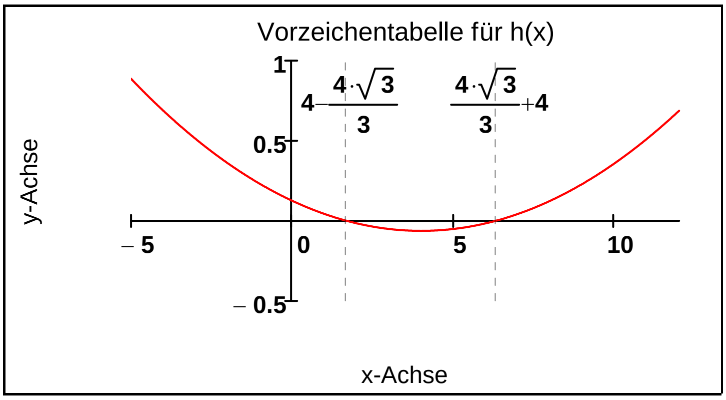
Steigung der Rampe: $m_f := \frac{1}{8}$

$r'(x) > \frac{1}{8} \rightarrow \frac{3\cdot x}{32} - \frac{3\cdot x^2}{256} > \frac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{256}\cdot x^2 + \frac{3}{32}\cdot x - \frac{1}{8} > 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{256}\cdot x^2 - \frac{3}{32}\cdot x + \frac{1}{8} < 0$

Nebenrechnung: $h(x) := \frac{3}{256} \cdot x^2 - \frac{3}{32} \cdot x + \frac{1}{8}$

$$h(x) = 0 \rightarrow \frac{3 \cdot x^2}{256} - \frac{3 \cdot x}{32} + \frac{1}{8} = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3} + 4 \\ 4 - \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.3 \\ 1.7 \end{pmatrix}$$



Gesuchter Bereich:

$$4 - \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3} < x < \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3} + 4$$

$$1.7 < x < 6.3$$

Teilaufgabe 3.3.2 **(6 BE)**
Zeigen Sie, dass beim Vorschlag des Nachbarn genauso viel Material aufgeschüttet werden müsste wie bei der ursprünglichen Idee (Teilaufgabe 3.2).

Stammfunktion: $\int \left(\frac{1}{8} \cdot x \right) dx = \frac{x^2}{16}$

Fläche unter dem Graphen: $A_2 := \int_0^8 \left(\frac{1}{8} \cdot x \right) dx$ $\qquad A_2 = 4$

Volumen der Aufschütung: $V_2 := A_2 \cdot m^2 \cdot 3 \cdot m$ $\qquad V_2 = 12\, m^3$