

Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2012

• Mathematik 12 Nichttechnik - S I - Lösung



Bei den folgenden Aufgaben sollen relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden.

Teilaufgabe 1.0

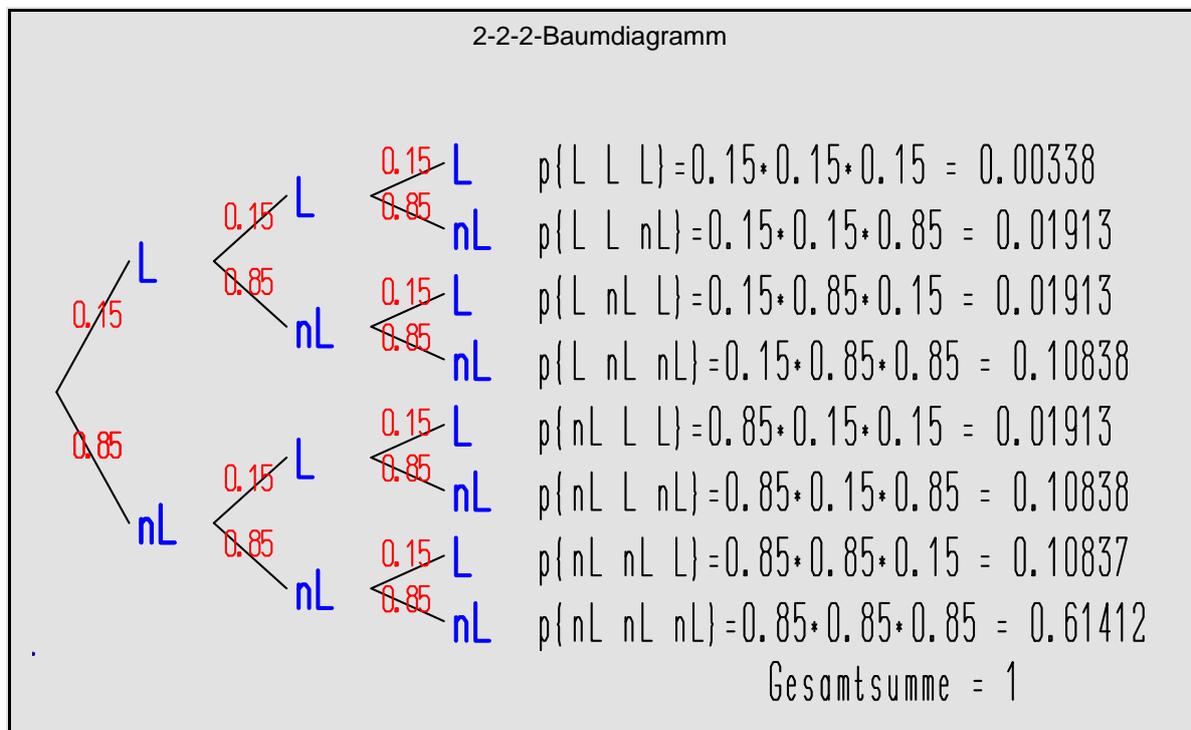
Statistiken geben den Anteil der Linkshänder in der Bevölkerung mit 15 Prozent an. In einer Fußgängerzone werden Passantennach deren bevorzugter Schreibhand gefragt.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Bestimmen Sie zum Beispiel mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit, dass man spätestens bei der dritten Befragung auf einen Linkshänder stößt.

▢ Berechnungen

L: Linkshänder; nL: kein Linkshänder



$$E = \{ L, nLL, nLnLL \}$$

$$P(E) := 0.15 + 0.85 \cdot 0.15 + 0.85 \cdot 0.85 \cdot 0.15$$

$$P(E) = 0.3859$$

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter 50 Befragten

- genau 10 Linkshänder
- mindestens 8 aber nicht mehr als 12 Linkshänder
- höchstens 25 Linkshänder
- genau zwei Linkshänder und diese in der Befragung nacheinander befinden.

$$P(E_a) = W(10) = B(50, 0.15, 10) = 0.08899$$

$$P(E_b) = P(8 \leq X \leq 12) = F(12) - F(7) = \sum_{i=0}^{12} B(50, 0.15, i) - \sum_{i=0}^7 B(50, 0.15, i)$$

$$\dots = 0.96994 - 0.51875 = 0.45119$$

$$P(E_c) = F(25) = \sum_{i=0}^{25} B(50, 0.15, i) \approx 1$$

LL.....

.LL.....

· 49 Möglichkeiten $P(E_d) = 49 \cdot 0.15^2 \cdot 0.85^{48} = 0.00045$

·

·

.....LL.

.....LL

Teilaufgabe 2.0

In einer weiteren Befragung von 200 zufällig ausgewählten Personen wurden genau 30 Linkshänder (L) gezählt. Davon waren 9 Frauen (F). Die restlichen 51 Frauen in der Befragung waren Rechtshänder. Die Auswahl einer Person und die Ermittlung ihrer Schreibhand und ihres Geschlechts wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Ermitteln Sie mithilfe einer Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse des Zufallsexperiments.

Bezeichnung: L: Linkshänder; nL: kein Linkshänder; F: Frau; nF: keine Frau

Gegeben: $P(L) = \frac{30}{200} = 0.15$ $P(L \cap F) = \frac{9}{200} = 0.045$ $P(\bar{L} \cap F) = \frac{51}{200} = 0.255$

Gegeben in der Vierfeldertafel:

Berechnete Werte:

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & \text{"L"} & \text{"nL"} & \blacksquare \\ \text{"F"} & 0.045 & 0.255 & \blacksquare \\ \text{"nF"} & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & 0.15 & 0.85 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & \text{"L"} & \text{"nL"} & \blacksquare \\ \text{"F"} & 0.045 & 0.255 & 0.30 \\ \text{"nF"} & 0.105 & 0.595 & 0.70 \\ \blacksquare & 0.15 & 0.85 & 1 \end{pmatrix}$$

$P(\{LF\}) = 0.045$ $P(\{LnF\}) = 0.105$ $P(\{nLF\}) = 0.255$ $P(\{nLnF\}) = 0.595$

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

Beschreiben Sie das Gegenereignis von $F \cup \bar{L}$ möglichst einfach mit Worten und geben Sie dessen Wahrscheinlichkeit an.

$$E = \text{Gegenereignis } (F \cup \bar{L}) = \bar{F} \cap L \quad P(\bar{F} \cap L) = 0.105$$

Die befragte Person ist männlich und Linkshänder.

Teilaufgabe 2.3 (3 BE)

Untersuchen Sie, ob die Ereignisse L und F stochastisch unabhängig sind und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

$$P(F \cap L) = 0.045$$

\Rightarrow F und L sind stochastisch unabhängig

$$P(F) \cdot P(L) = 0.30 \cdot 0.15 = 0.045$$

Die Eigenschaft *Linkshänder* ist nicht abhängig vom Geschlecht.

Teilaufgabe 3.0

30 Linkshänder unterziehen sich einem Reaktionstest, bei welchem sie mit der rechten Hand beim Auftreten eines Ereignisses eine Taste betätigen. Folgende Tabelle zeigt, mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$, die gemessenen und auf Zehntelsekunden gerundeten Reaktionszeiten der Versuchspersonen:

("Reaktionszeit in s"	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8)
("Anzahl der Personen"	a	6	b	a	3)

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)

Berechnen Sie Werte a und b, wenn bekannt ist, dass genau 21 Versuchspersonen höchstens $0.6 \cdot s$ Reaktionszeit benötigen.

[Teilergebnis: $b = 9$]

$$(1) \quad a + 6 + b = 21$$

(2)

$$(2) \quad a + 3 = 9 \quad \Rightarrow \quad a = 6 \quad \Rightarrow \quad b = 9$$

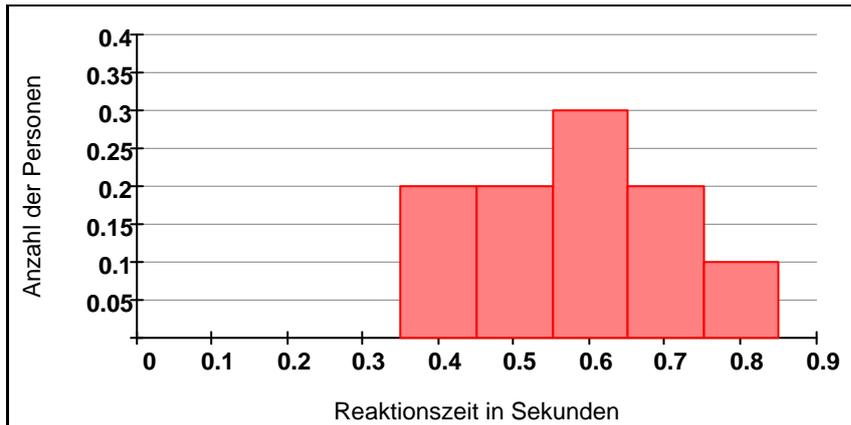
Teilaufgabe 3.2 (5 BE)

Die Zufallsgröße X gibt die Reaktionszeit einer zufällig herausgegriffenen Versuchsperson an. Erstellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X und stellen Sie sie geeignet graphisch dar.



Zufallsgrößen: $\mathbf{x_0 = (0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8)}$

Wahrscheinlichkeiten: $\mathbf{y_0 = (0.2 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1)}$



Teilaufgabe 3.3 (5 BE)

Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

Erwartungswert:

$$\mu := 0.4 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.2 + 0.8 \cdot 0.1 \quad \mu = 0.58$$

Varianz:

$$\text{Var} := 0.4^2 \cdot 0.2 + 0.5^2 \cdot 0.2 + 0.6^2 \cdot 0.3 + 0.7^2 \cdot 0.2 + 0.8^2 \cdot 0.1 - 0.58^2 \quad \text{Var} = 0.016$$

Standardabweichung: $\sigma := \sqrt{\text{Var}} \quad \sigma = 0.125$

untere Grenze: $\mu - \sigma = 0.455$ obere Grenze: $\mu + \sigma = 0.705$

$$P(|X - \mu| < \sigma) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(0.455 < X < 0.705) = 0.2 + 0.3 + 0.2 = 0.7$$

Teilaufgabe 4.0

Eine Versuchsperson vermutet, dass mindestens 80% der Linkshänder eine Reaktionszeit von maximal $0.6 \cdot s$ haben, wenn beim Reaktionstest die Taste mit der linken Hand betätigt wird (= Testkriterium). Eine zweite Versuchsperson ist weniger optimistisch (Gegenhypothese). Dazu wird ein Test mit 30 Linkshändern durchgeführt.

Teilaufgabe 4.1 (6 BE)

Geben Sie für obigen Test die Testgröße sowie die Gegenhypothese an und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. Welche Entscheidung legt der Test nahe, wenn 70% der Versuchspersonen das Testkriterium erfüllen?

Testgröße: Anzahl der Linkshänder unter $N = 30$.

Testart: Linksseitiger Signifikanztest

Nullhypothese H_0 : $p_0 \geq 0.8$

Gegenhypothese H_1 : $p_1 < 0.8$

Annahmehbereich: $A = \{ k + 1, k + 2, \dots, 30 \}$

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{ 0, 1, 2, \dots, k \}$

Signifikanzniveau: $\alpha_S = 0.05$

$$P(\bar{A}) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq k) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^k (30, 0.8, i) \leq 0.05$$

Tafelwerk Seite 33: $0.02562 \Rightarrow k = 19$

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{ 0, 1, \dots, 19 \}$

$0.7 \cdot 30 = 21 \in A \Rightarrow$ Wenn 21 Personen die gestellte Bedingungen erfüllen, wird die Nullhypothese nicht abgelehnt.

Teilaufgabe 4.2 (2 BE)

Erläutern Sie, worin im vorliegenden Fall der Fehler 2. Art besteht.

Fehler 2. Art: Die Nullhypothese ist falsch, wird jedoch als richtig beurteilt.

Hier: Man nimmt an, dass mindestens 80% der Linkshänder innerhalb von 6 Sekunden reagieren, obwohl es weniger sind.