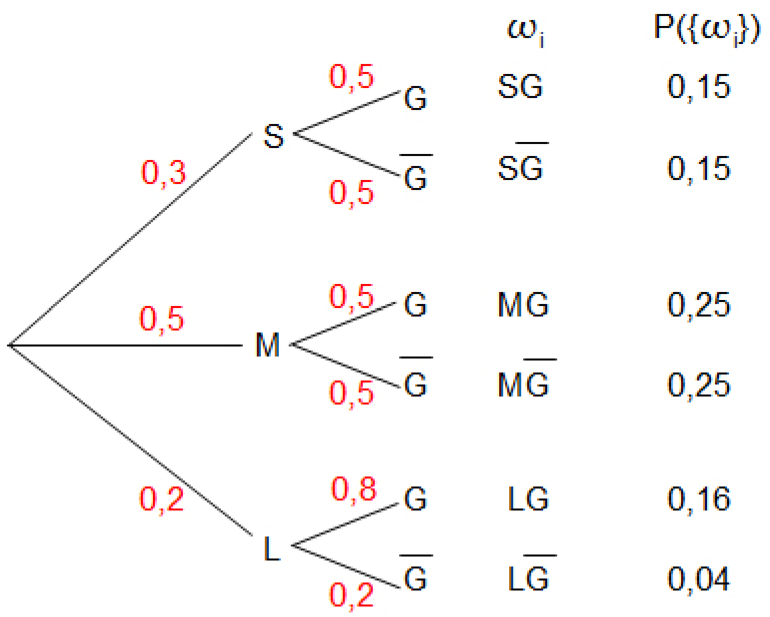
Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2012

- **Mathematik 12 Nichttechnik - S II - Lösung**

Teilaufgabe 1.0
Ein Discounter bietet in der Aktionswoche *Alles rund um's Radeln* unter anderem auch Radl-Handschuhe in den Größen S, M und L an. Die Hälfte der Handschuhpaare wird mit Größe M und nur zu 20% in der Größe L geliefert. Außerdem gibt es in den beiden kleineren Größen jeweils in gleicher Anzahl die Handschuhe in gefütterter ($\mathbf{G}$) und in ungefütterter ($\overline{\mathbf{G}}$) Variante. 80% der Handschuhe in Größe L gefüttert. Die Auswahl eines Hndschuhpaars wird als Zufallsexperiment aufgefasst. Die relativen Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)
Bestimmen Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller sechs Elementar-ereignisse.



Teilaufgabe 1.2 (5 BE)
Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:

E_1: Ein zufällig ausgewähltes Handschuhpaar hat nicht die Größe L.

E_2: Es werden gefütterte Handschuhe genommen.

E_3: Gegenereignis von $E_2 \cup \overline{E_1}$

Geben Sie die drei Ereignisse E_1, E_2 und E_3 in aufzählender Mengenschreibweise an. Berechnen Sie ferner die Wahrscheinlichkeit, dass E_1 und E_2 gleichzeitig eintreten.

$\mathbf{E_1 = \{\ SG\ ;\ S\overline{G}\ ;\ MG\ ;\ M\overline{G}\ \}}$

$\mathbf{E_2 = \{\ SG\ ;\ MG\ ;\ LG\ \}}$

E_3 = Gegenereignis $(E_2 \cup \overline{E_1}) = \overline{E_2} \cap E_1 = \{ S\overline{G} ; M\overline{G} \}$

$E_1 \cap E_2 = \{ SG ; MG \}$ $\qquad$ $P(E_1 \cap E_2) = 0.15 + 0.25 = 0.40$

Teilaufgabe 1.3 (6 BE)
Am Nachmittag sind noch genau 20 Paare der gelieferten Handschuhe im warenkorb. Vereinfacht gelten weiterhin die Wahrscheinlichkeiten aus 1.0.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_4: Es sind noch genau 10 Paare der Größe M vorhanden.

E_5: Es sind mindestens sechs und höchstens 12 Paare der Größe S übrig.

E_6: Es sind höchstens zwei gefütterte Handschuhpaare in Größe L im Korb.

$$P(E_4) = P(X = 10) = B(20, 0.5, 10) = 0.17620$$

$$P(E_5) = P(6 \le X \le 12) = F(12) - F(5) = \sum_{i=0}^{12} B(20, 0.3, i) - \sum_{i=0}^{5} B(20, 0.3, i)$$

$$... = 0.99872 - 0.41637 = 0.58235$$

$$P(E_6) = P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$... = \binom{20}{0} \cdot 0.16^0 \cdot 0.84^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0.16^1 \cdot 0.84^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0.16^2 \cdot 0.84^{18}$$

$$... = 0.03059 + 0.11654 + 0.21087 = 0.358$$

Teilaufgabe 1.4.0
Ein Hautarzt wird ca. zwei Wochen nach der Discounter-Aktion hellhörig, als von seinen 150 Patienten, die ihn innerhalb einer Woche konsultieren, genau die Hälfte mit Hautausschlägen an den Händen (**A**) zu ihm kommt. Bei seinen Nachforschungen stellt er fest, dass ein Drittel aller Patienten die Handschuhe aus dem Discounter trägt (**H**), von denen 25 über Hautausschlag klagen.

Teilaufgabe 1.4.1 (4 BE)
Erstellen Sie eine Vierfeldertafel und weisen Sie damit nach, dass das Tragen der Handschuhe aus dem Discounter den Ausschlag an den Händen nicht beeinflusst.

$P(A) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(H) = \frac{1}{3}$

Gegeben in der Vierfeldertafel:

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & \text{"H"} & \text{"nH"} & \blacksquare \\ \text{"A"} & 25 & \blacksquare & 75 \\ \text{"nA"} & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & 50 & \blacksquare & 150 \end{pmatrix}$$

Berechnete Werte:

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & \text{"H"} & \text{"nH"} & \blacksquare \\ \text{"A"} & 25 & 50 & 75 \\ \text{"nA"} & 25 & 50 & 75 \\ \blacksquare & 50 & 100 & 150 \end{pmatrix}$$

Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & \text{"H"} & \text{"nH"} & \blacksquare \\ \text{"A"} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \text{"nA"} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \blacksquare & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

(I) $\quad P(A) \cdot P(H) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

(II) $\quad P(A \cap H) = \frac{1}{6}$

$P(A) \cdot P(H) = P(A \cap H)$

$\Rightarrow$ **A und H sind stochastisch unabhängig**

Teilaufgabe 1.4.2 (2 BE)
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit $P(A \cup \overline{H})$.

Wahrscheinlichkeit $P(A \cup \overline{H}) = P(A) + P(\overline{H}) - P(A \cap \overline{H}) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

oder:

Wahrscheinlichkeit $P(A \cup \overline{H}) = 1 - P(\overline{A} \cap H) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Teilaufgabe 2.0
Der Marktleiter eines Discounters beobachtet an einem Tag das Kaufverhalten der Kunden bezüglich der Aktionsartikel. Die Zufallsgröße X ibt die Anzahl der gekauften Aktionsartikel pro Kunde an. Bei Verwendung geeigneter Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ gilt hierfür folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ P(X = x) & 0.1 & a & 2 \cdot a & 4 \cdot a + b & 0.1 & b \end{pmatrix}$$

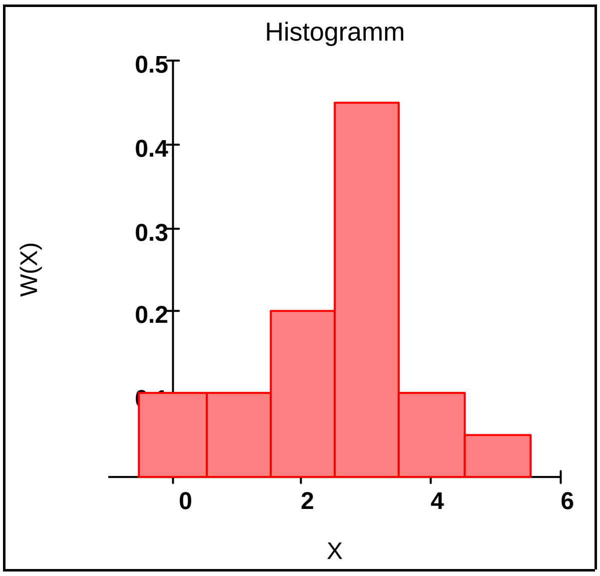
Teilaufgabe 2.1 (4 BE)
Berechnen Sie die Werte a und b, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als drei Artikel gekauft werden, 40% beträgt.
[Teilergebnis: $a = 0.1$]

$0.1 + a + 2 \cdot a = 0.4 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot a = 0.3 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0.1$

$0.4 + 4 \cdot a + b + 0.1 + b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0.4 + 4 \cdot 0.1 + b + 0.1 + b = 1$

$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot b = 0.1 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0.05$

Teilaufgabe 2.2 **(2 BE)**
Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X geeignet graphisch dar.



Zufallsgröße: $x0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Wahrscheinlichkeiten: $y0 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.45 \\ 0.1 \\ 0.05 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 2.3 **(5 BE)**
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallswerte außerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

Erwartungswert: $\mu = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.45 + 4 \cdot 0.1 + 5 \cdot 0.05 = 2.5$

Varianz: $\sigma^2 = 0^2 \cdot 0.1 + 1^2 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.2 + 3^2 \cdot 0.45 + 4^2 \cdot 0.1 + 5^2 \cdot 0.05 - 2.5^2 = 1.55$

Standardabweichung: $\sigma = 1.24$

Wahrscheinlichkeit: $P(|X - \mu| > \sigma) = 1 - P(|X - \mu| \le \sigma) = 1 - P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma)$

untere Grenze: $\mu - \sigma = 2.5 - 1.24 = 1.26$

obere Grenze: $\mu + \sigma = 2.5 + 1.24 = 3.74$

$\Rightarrow \quad 1 - P(1.26 \le X \le 3.74) = 1 - (P(X = 3) + P(X = 2)) = 1 - (0.45 + 0.2) = 0.35$

Teilaufgabe 3.0
Die Zentrale eines Discounters behauptet, dass in einer bestimmten Filiale die Kundenzufriedenheit bei 70% liegt. Der betroffene Marktleiter glaubt, dass dieser Anteil höher liegt (Gegenhypothese). Deshalb führt er eine Umfrage durch, bei der er 200 Kundenantworten auswertet.

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)
Geben Sie zu diesem Test die Testgröße sowie die Nullhypothese an und ermitteln Sie deren größtmöglichen Ablehnungsbereich $\overline{A}$ auf dem 5%-Niveau. Welche entscheidung legt der Test nahe, wenn von diesen 200 Kunden 152 Zufriedenheit äußern?

Testgröße:	Anzahl der zufriedenen Kunden unter $N = 200$ befragten.
Testart:	Rechtsseitiger Signifikanztest
Nullhypothese H_0:	$p_0 \le 0.70$
Gegenhypothese H_1:	$p_1 > 0.70$
Annahmebereich:	$A = \{ 0, 1, 2, ..., k \}$
Ablehnungsbereich:	$\overline{A} = \{ k+1, k+2, ..., 200 \}$
Sigifikanzniveau:	$\alpha_S = 0.05$

$$P(\overline{A}) \le 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \ge k+1) \le 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \le k) \le 0.05$$

$$\Leftrightarrow \quad P(X \le k) \ge 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{k} (200, 0.7, i) \ge 0.95$$

Tafelwerk Seite 35: $0.96405 \quad \Rightarrow \quad k = 151$

Ablehungsbereich: $\overline{A} = \{ 152, 153, ..., 200 \}$

$152 \in \overline{A} \quad \Rightarrow$ die Behauptung des Marktleiters wird bestätigt.

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)
Erläutern Sie, worin im vorliegenden Fall der Fehler 2. Art besteht.

Fehler 2. Art: Die Nullhypothese ist falsch, wird jedoch als richtig beurteilt.
Hier: Es wird angenommen, dass die Kundenzufriendenheit bei höchstens 70% liegt, obwohl sie tatsächlich höher ist.