Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2012

- **Mathematik 13 Nichttechnik - Aufgabe AI - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = \frac{(x-3)\cdot(x+2)}{2\cdot x^2 - 8\cdot x + 6}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Bestimmen Sie D_f und geben Sie die Nullstelle sowie die Art der Definitionslücken von f an.

Nuöllstellen des Nenners: $2\cdot x^2 - 8\cdot x + 6 = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{ 1 ; 3 \}$

Faktorisieren: $f(x) = \frac{(x-3)\cdot(x+2)}{2\cdot(x-1)\cdot(x-3)}$

$x_1 = 3$ ist stetig behebbare Definitionslücke.

$x_2 = 1$ ist Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

$x_0 = -2$ ist einfache Nullstelle.

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $\bar{f}(x) = \frac{x+2}{2\cdot x - 2}$ mit $D_{\bar{f}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ die stetige Fortsetzung von f ist.

Untersuchen Sie das Verhalten von $\bar{f}$ in der Umgebung ihrer Definitionslücke und geben Sie die Gleichungen und die Art aller Asymptoten des Graphen von $\bar{f}$ an

$$\frac{(x-3)\cdot(x+2)}{2\cdot(x-1)\cdot(x-3)} = \frac{x+2}{2\cdot(x-1)} = \bar{f}(x)$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\overset{\overset{3}{\uparrow}}{x+2}}{\underset{\underset{0^-}{\downarrow}}{2\cdot(x-1)}} \rightarrow -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{\overset{\overset{3}{\uparrow}}{x+2}}{\underset{\underset{0^+}{\downarrow}}{2\cdot(x-1)}} \rightarrow \infty$$

Senkrechte Asymptote mit VZW: $x = 1$

Waagrechte Asymptote: $y = \frac{1}{2}$

Teilaufgabe 1.3 (6 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von $G_{\overline{f}}$ und geben Sie die Wertemenge von $\overline{f}$ an.

[Zur Kontrolle: $\overline{f}'(x) = \dfrac{-3}{2\cdot(x-1)^2}$]

$$\overline{f}'(x) = \frac{1\cdot(2\cdot x - 2) - (x+2)\cdot 2}{(2\cdot x - 2)^2} = \frac{2\cdot x - 2 - 2\cdot x - 4}{4\cdot(x-1)^2} = \frac{-6}{4\cdot(x-1)^2} = \frac{-3}{2\cdot(x-1)^2}$$

$\dfrac{-3}{2\cdot(x-1)^2} < 0$ für alle $x \in D_{\overline{f}}$

$G_{\overline{f}}$ ist streng monoton fallend in $]-\infty\ ;\ 1[$ und $G_{\overline{f}}$ ist streng monoton fallend in $]\ 1\ ;\ \infty\ [$.

Wertemenge: $W = \ ]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}\ [\ \cup\ ]\ \frac{1}{2}\ ;\ \infty\ [$

Teilaufgabe 1.4 (6 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen $G_{\overline{f}}$ im Punkt $P(2\ /\ \overline{f}(2))$ und bestimmen Sie die Koordinaten des weiteren Punktes R von $G_{\overline{f}}$, in welchem der Graph $G_{\overline{f}}$ die gleiche Steigung wie die Tangente t besitzt.

Punkt P: $x_P := 2$ $\quad y_P := 2$

Steigung der Tangente in P: $m_P := -\frac{3}{2}$

Tangente: $t_P(x) := -\frac{3}{2}\cdot(x-2) + 2 \qquad t_P(x) = 5 - \frac{3\cdot x}{2}$

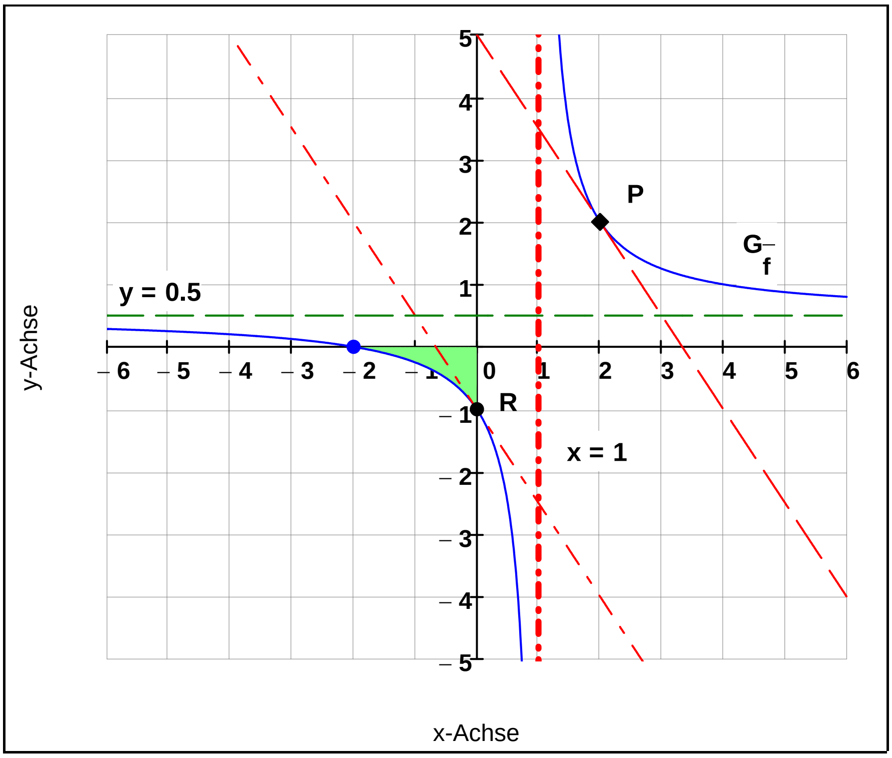
$$\frac{-3}{2\cdot(x-1)^2} = -\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 1 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_R \\ x_P \end{matrix}$$

Punkt R: $x_R = 0 \qquad y_R = -1 \qquad \Rightarrow \qquad$ **R(0/-1)**

Teilaufgabe 1.5 (6 BE)
Zeichnen Sie die Asymptoten und die beiden Tangenten in den Punkten P und R in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie $G_{\bar{f}}$ mithilfe der vorliegenden Ergebnisse in die Zeichnung.

Funktionsterm: $f\_(x) := \dfrac{x+2}{2 \cdot x - 2}$

Tangente in R. $t_R(x) := -\dfrac{3}{2} \cdot x - 1$



Teilaufgabe 1.6 (6 BE)
Zeigen Sie, dass sich $\bar{f}$ in der Form $\bar{f}(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2 \cdot x - 2}$ schreiben lässt, und ermitteln Sie die Gleichung einer Stammfunktion F von $\bar{f}$. Bestimmen Sie die Flächenmaßzahl des Flächenstücks, das der Graph von $\bar{f}$ im III. Quadranten mit den Koordinatenachsen einschließt.

Umformung: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2 \cdot x - 2} = \dfrac{x - 1 + 3}{2 \cdot x - 2} = \dfrac{x+2}{2 \cdot x - 2}$

Stammfunktion: $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{2} + \frac{3}{2 \cdot x - 2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2} \cdot \ln(|x-1|) + C$

Fläche:

$$A = -\int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2\cdot x - 2}\right) dx = -\left[0 + \frac{3}{2}\cdot\ln(1) - \frac{1}{2}\cdot(-2) - \frac{3}{2}\cdot\ln(3)\right] = \frac{3\cdot\ln(3)}{2} - 1 = 0.648$$

Teilaufgabe 1.7 (4 BE)

Gegeben ist die Funktion $g\left[\ln\left[\overline{f}(x)\right]\right]$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset IR$.
Geben Sie D_g an und bestimmen Sie die Nullstelle von g.

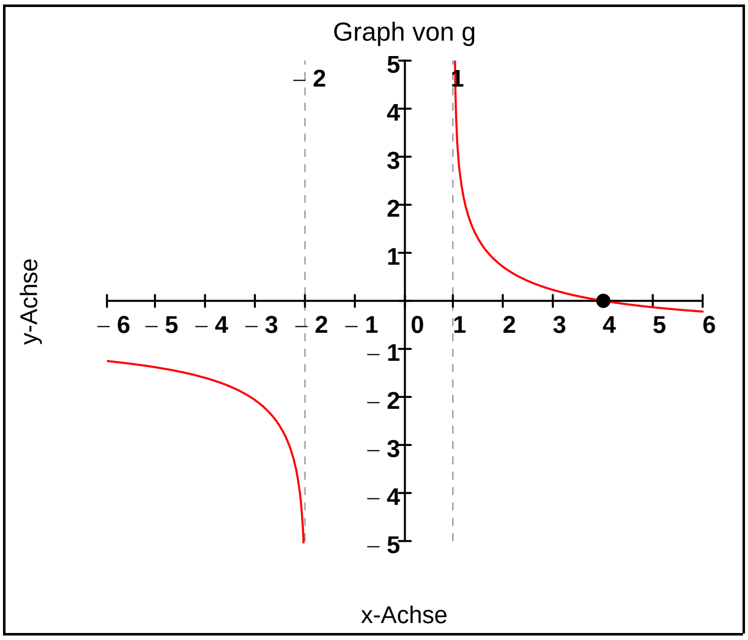
Funktionsterm: $g(x) := \ln\left(\frac{x+2}{2\cdot x - 2}\right)$

Definitionsmenge: $\frac{x+2}{2\cdot x-2} > 0$ **auflösen**, $x \rightarrow 1 < x \vee x < -2$

$\Rightarrow \quad D_g = \left]-\infty\, ;\, -2\right[\cup \left]1\, ;\, \infty\right[$

Nullstelle: $\ln\left(\frac{x+2}{2\cdot x-2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{2\cdot x-2} = 1$ **auflösen**, $x \rightarrow 4$

$x_0 := 4$



Teilaufgabe 2.0
Bei der Weinerzeugung kann man während des Gärprozesses den aktuellen Alkoholgehalt des Mostes näherungsweise mit der Funktion $A(t) = \dfrac{100}{8 + b \cdot e^{c \cdot t}}$ berechnen, t ist dabei die Dauer des Gärprozesses in Tagen mit $t \geq 0$, b und c sind reelle Konstanten mit $b > 0$ und $c > 0$.
$A(t)$ gibt den Alkoholgehalt in Volumenprozent an. Je nach den Gegebenheiten im Gärkeller variieren b und c. Bei der Rechnung kann auf die Mitführung von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie die Ergebnisse sinnvoll.

Teilaufgabe 2.1 (6 BE)
Der Traubenmost des Winzers Müller hat bereits zu Beginn des Gärprozesses im Keller einen Alkoholgehalt von 2,00%. Nach 20 Tagen beträgt der Alkoholgehalt genau 8,46%.
Bestimmen Sie damit die Werte b und c.
[Ergebnis: $b = 42$; $c = -0.12$]

$$A(t, b, c) := \frac{100}{8 + b \cdot e^{c \cdot t}}$$

$$A(0, b, c) = 2 \rightarrow \frac{100}{b + 8} = 2 \qquad (1)$$

$$A(20, b, c) = 8.46 \rightarrow \frac{100}{b \cdot e^{20 \cdot c} + 8} = 8.46 \qquad (2)$$

Aus (1) $\quad \dfrac{100}{b + 8} = 2$ auflösen, b $\rightarrow 42$

In (2) $\quad \dfrac{100}{42 \cdot e^{20 \cdot c} + 8} = 8.46 \;\middle|\;$ auflösen, c; Gleitkommazahl, 3 $\rightarrow -0.12$

$$\Rightarrow \qquad A(t) := \frac{100}{8 + 42 \cdot e^{-0.12 \cdot t}}$$

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)
Nach 40 Tagen wird der Gärvorgang abgebrochen. Berechnen Sie den Alkoholgehalt des dann fertigen Weins. Ermitteln Sie den Alkoholgehalt, der sich nach sehr langer Zeit einstellen würde.

Nach 40 Tagen: $\quad A(40) = 12.0$

Nach sehr langer Zeit: $\quad \lim\limits_{t \rightarrow \infty} \dfrac{100}{8 + 42 \cdot \underbrace{e^{-0.12 \cdot t}}_{\downarrow\; 0}} \rightarrow 12.5$

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)
Im Herbst wird der junge Wein (*Federweißer*) ausgeschenkt, dessen Alkoholgehalt höchstens 10% beträgt. Berechnen Sie, bis zu welchem Tag nach Beginn des Gärprozesses der Federweiße ausgeschenkt werden kann.

$$\frac{100}{8+42\cdot e^{-0.12\cdot t}} < 10 \rightarrow 0.0 < t < 25.4$$

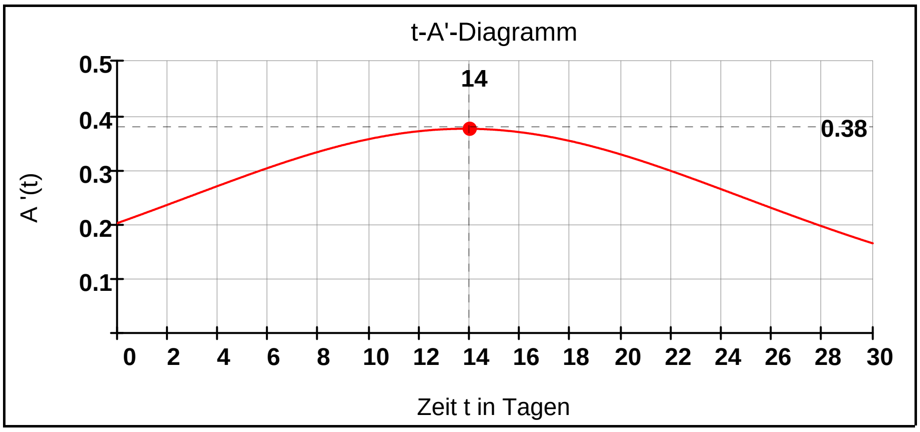
Der Federweiße muss bis zum 25. Tag ausgechenkt sein.

Teilaufgabe 2.4 (3 BE)
Bestimmen Sie die Ableitung $\frac{dA(t)}{dt} = A'(t)$ und zeigen Sie, dass der Alkoholgehalt des Weins ständig zunimmt.

$$A'(t) := \frac{100\cdot(-42)\cdot(-0.12)}{\left(8+42\cdot e^{-0.12\cdot t}\right)^2} \qquad A'(t) := \frac{504}{\left(8+42\cdot e^{-0.12\cdot t}\right)^2}$$

$A'(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ $\Rightarrow$ Der Graph von A ist streng monoton wachsend
$\Rightarrow$ der Alkoholgehalt nimmt ständig zu.

Teilaufgabe 2.5 (4 BE)
Der Graph der Ableitung **A'** ist untenstehend abgebildet. Machen Sie mithilfe des Graphen möglichst genaue und begründete Aussagen über die Entwicklung des Alkoholgehalts des Weins. Entnehmen Sie aus der Zeichnung die Koordinaten des Hochpunkts von **A'** und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang.



Der Alkoholgehalt nimmt bis zur größten Zunahme am 14. Tag ständig zu, danach wird die Zunahme des Alkoholgehaltes geringer.

Hochpunkt: (14 / 0,38) $\Rightarrow$ Die größte Zunahme am 14. Tag beträgt $0.38\frac{\%}{\text{Tag}}$.

In der Prüfung nicht verlangt: