# Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2012

## • Mathematik 13 Nichttechnik - Aufgabe AII - Lösung

made with mathcad

**Teilaufgabe 1.0**

Gegeben ist die reelle Funktion g mit $g(x) = \frac{4\cdot x^2 - 4\cdot x + 1}{2\cdot x^2}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit $G_g$ bezeichnet.

**Teilaufgabe 1.1 (8 BE)**

Geben Sie $D_g$ an, berechnen Sie die Nullstelle von g und geben Sie deren Vielfachheit an. Untersuchen Sie das Verhalten von $g(x)$ an den Rändern von $D_g$ und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von $G_g$ an.

Definitionsmenge: $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$4\cdot x^2 - 4\cdot x + 1 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad x_0 = \frac{1}{2}$$ zweifache Nullstelle

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\overset{\overset{1}{\uparrow}}{4\cdot x^2 - 4\cdot x + 1}}{\underset{\underset{0}{\downarrow}}{2\cdot x^2}} \rightarrow \infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{\overset{\overset{1}{\uparrow}}{4\cdot x^2 - 4\cdot x + 1}}{\underset{\underset{0}{\downarrow}}{2\cdot x^2}} \rightarrow \infty$$

Vertikale Asymptote mit VZW: $x = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4\cdot x^2 - 4\cdot x + 1}{2\cdot x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4 - \overset{\overset{0}{\uparrow}}{\frac{4}{x}} + \overset{\overset{0}{\uparrow}}{\frac{1}{x^2}}}{2} = 2$$

$\Rightarrow$ horizontale Asymptote: $y = 2$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4\cdot x^2 - 4\cdot x + 1}{2\cdot x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{2} = 2$$

**Teilaufgabe 1.2 (4 BE)**
Geben Sie gegebenenfalls unter Verwendung der Ergebnisse von Aufgabe 1.1 die Koordinaten des einzigen Extrempunktes von $G_g$ an und ermitteln Sie dessen Art.

Die doppelte Nullstelle berührt den Graphen, $x_0 = \frac{1}{2}$ ist also Extremstelle.

Verhalten an der vertikalen Asymptote und für $x \rightarrow \infty$ ergibt: Der Extrempunkt $(\,0.5\,/\,0\,)$ ist ein Tiefpunkt.

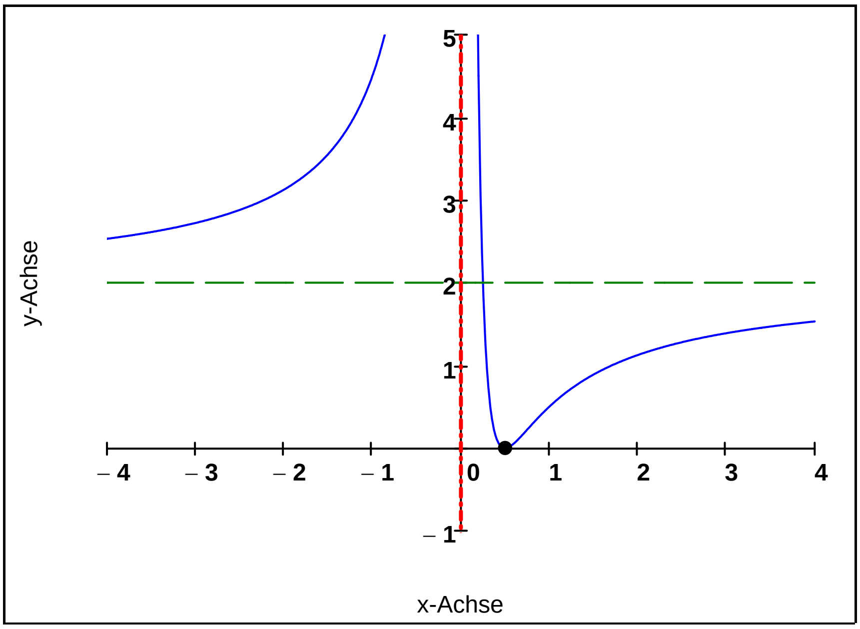
**Teilaufgabe 1.3 (3 BE)**
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von g mit seiner waagrechten Asymptote.

$$\frac{4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1}{2 \cdot x^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1 = 4 \cdot x^2 \quad \Leftrightarrow \quad -4 \cdot x + 1 = 0$$

Schnittstelle: $x_S = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad S\,(\,0.25\,/\,2\,)$

**Teilaufgabe 1.4 (5 BE)**
Zeichnen Sie die Asymptoten in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie $G_g$ mithilfe Ihrer bisherigen Ergebnisse in die Zeichnung.

$$g(x) := \frac{4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1}{2 \cdot x^2} \qquad y_0 := 2$$



**Teilaufgabe 2.0**

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) := \frac{2\cdot\ln(x)+1}{x}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset IR$. Ihr Graph ist $G_f$.

**Teilaufgabe 2.1 (8 BE)**

Bestimmen Sie $D_f$ und die Nullstellen von f. Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ an den Rändern von $D_f$ und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von $G_f$ an.

Definitionmenge: $D_f = ]\ 0\ ;\ \infty\ [$

Nullstellenbedingung: $2\cdot\ln(x)+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(x) = -\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x_0 = e^{-0.5}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{2\cdot\ln(x)+1}^{-\infty}}{\underbrace{x}_{0}} = \lim_{x\to 0^+}\left[\underbrace{\frac{1}{x}}_{\infty}\cdot\overbrace{(\ln(x)+1)}^{-\infty}\right] = -\infty \quad\Rightarrow\quad \text{vertikale Asymptote } x=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{2\cdot\ln(x)+1}^{\infty}}{\underbrace{x}_{\infty}} \overset{l\,H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1} = 0 \quad\Rightarrow\quad \text{horizontale Asymptote } y=0$$

**Teilaufgabe 2.2 (7 BE)**

Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f und bestimmen Sie die Art und die exakten Koordinaten des Extrempunktes von $G_f$.

[ Zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{-2\cdot\ln(x)+1}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{x\cdot\frac{2}{x} - (2\cdot\ln(x)+1)\cdot 1}{x^2} = \frac{2-2\cdot\ln(x)-1}{x^2} = \frac{1-2\cdot\ln(x)}{x^2}$$

Horizontale Tangenten: $f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1-2\cdot\ln(x) = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow \sqrt{e}$

Zählerfunktion: $z'(x) := 1 - 2 \cdot \ln(x)$

| | $x \neq 0$ | | $\sqrt{e}$ |
|---|---|---|---|
| Zähler | nicht def. | pos | neg |
| Nenner | nicht def. | pos | pos |
| f '(x) | nicht def. | pos | neg |
| $G_f$ | nicht def. | sms | smf |
| | | HP | |

$G_f$ ist streng monoton steigend

für $x \in \left]0 ; \sqrt{e}\right]$

$G_f$ ist streng monoton fallend

für $x \in \left[\sqrt{e} ; \infty\right[$

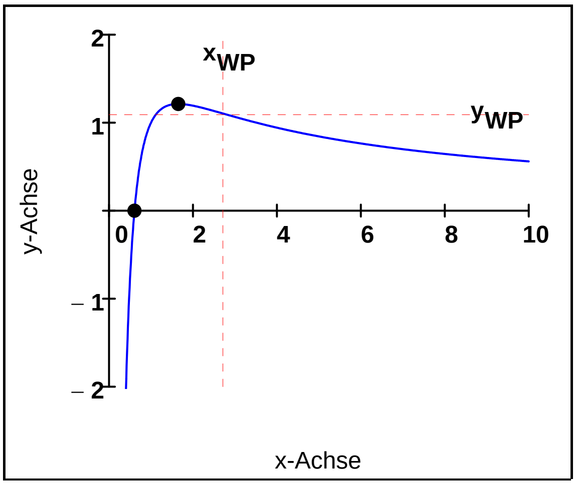
$$f\left(\sqrt{e}\right) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}}$$

Hochpunkt: $H\left(\sqrt{e}, \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$

**Teilaufgabe 2.3** (3 BE)
Nehmen Sie ohne weitere Rechnung aber mit Begründung Stellung zu der Aussage: *Der Graph von f besitzt einen Wendepunkt.* Begründen Sie Ihre Aussage.

Der Graph von f ist im Hochpunkt rechtsgekrümmt. Für $x \rightarrow \infty$ nähert sich der Graph der x-Achse von oben und es gibt keine Nullstelle rechts vom Hochpunkt, der Graph ist also linksgekrümmt, das heißt es exisitert ein Wendepunkt

**Teilaufgabe 2.4** (3 BE)
Skizzieren Sie $G_f$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem



**Teilaufgabe 3.0**
Ein großer Elektronik-Konzern hat in einer Untersuchung die Wartezeiten auf eine freie Telefonleitung bei seinem Callcenter erfasst. Die Funktion $W_k$ gibt dabei die Wahrscheinlichkeit an, mit der höchstens t Minuten (min) auf eine freie Telefonleitung gewartet werden muss.

Es gilt: $W_k(t) = 1 - e^{-k \cdot t}$ mit $t \in \mathbb{R}^+$ und $k \in \mathbb{R}^+$.

Der Wert von k ist von der Tageszeit abhängig.
Bei der Rechnung kann auf Einheiten verzichtet werden.

**Teilaufgabe 3.1 (5 BE)**
Berechnen Sie für $k_1 = \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{\text{min}}$, $k_2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{\text{min}}$ und $k_3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\text{min}}$ die Wahrscheinlichkeit in Prozent, höchstens 5 Minuten auf eine freie Leitung warten zu müssen, und folgern Sie hieraus die Bedeutung des Parameters k für die Wartezeit.

Modellfunktion: $W(t, k) := 1 - e^{-k \cdot t}$

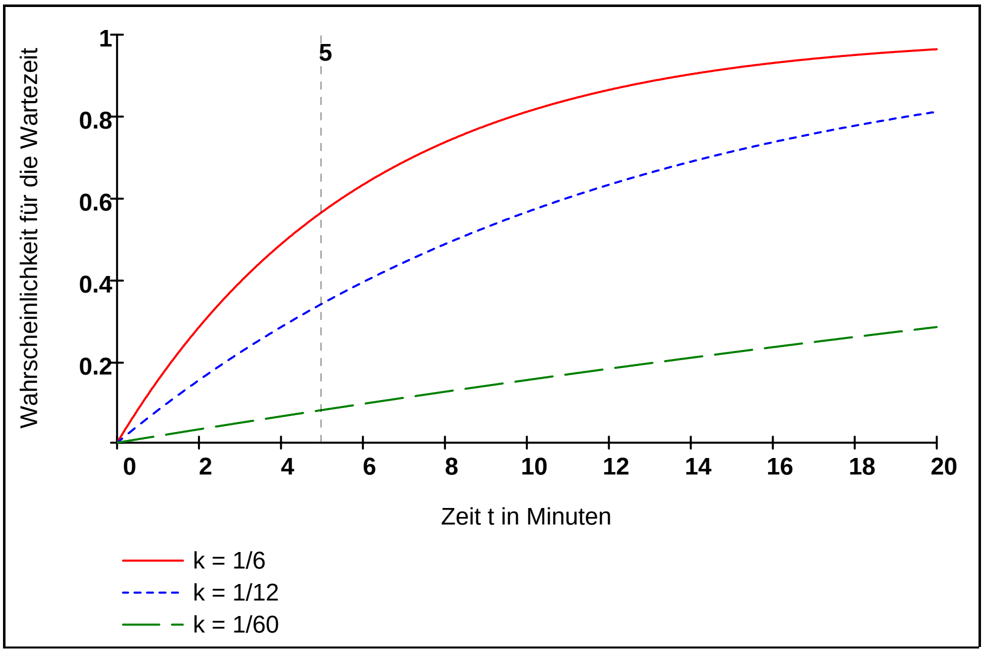
Konstanten: $k_1 := \frac{1}{60}$ $k_2 := \frac{1}{12}$ $k_3 := \frac{1}{6}$

$W(5, k_1) = 0.08$ also 8%

$W(5, k_2) = 0.341$ also 34%

$W(5, k_3) = 0.565$ also 56%

Je größer die Konstante k, desto kleiner ist die durchschnittliche Wartezeit.



**Teilaufgabe 3.2 (3 BE)**

Bestimmen Sie den Wert k in der Einheit $\frac{1}{\mathbf{min}}$, für den die Wahrscheinlichkeit 95% beträgt, dass ein Anrufer nach höchstens 10 Minuten auf eine freie Ladung durchgestellt wird.

$$W(10, k) = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-k \cdot 10} = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-k \cdot 10} = 0.05$$

$$-k \cdot 10 = \ln(0.05) \quad \Rightarrow \quad k_{10} := \frac{\ln\left(\frac{5}{100}\right)}{-10} \qquad k_{10} = \frac{\ln(20)}{10} = 0.30$$

**Teilaufgabe 3.3 (4 BE)**

Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{t \to \infty} W_k(t)$ und $\lim_{k \to \infty} \left(1 - e^{-k \cdot t}\right)$ und beschreiben Sie möglichst einfach deren Bedeutung.

$$\lim_{t \to \infty} \left(1 - \underbrace{e^{-k \cdot t}}_{\downarrow \atop 0}\right) \to 1$$

Nach sehr langer Wartezeit wird man mit Sicherheit eine freie Leitung bekommne.

$$\lim_{k \to \infty} \left(1 - \underbrace{e^{-k \cdot t}}_{\downarrow \atop 0}\right) \to 1$$

Bei sehr großen k-Werten hat man praktisch keine Wartezeit

**Teilaufgabe 3.4 (6 BE)**

Sei nun $k = 0.1 \cdot \frac{1}{\mathbf{min}}$.

Die durchschnittliche Wartezeit $\overline{T}$ berechnet sich als $\overline{T} = \int_0^{\infty} t \cdot W'_{0.1}(t)\, dt$. Zeigen Sie, dass $G(t) = -e^{-0.1 \cdot t} \cdot (t + 10)$ eine Stammfunktion von $t \cdot W'_{0.1}(t)$ ist. Berechnen Sie $\overline{T}$ und die Wahrscheinlichkeit, höchstens $\overline{T}$ Minuten auf eine freie Leitung warten zu müssen.

$$G(t) = -e^{-0.1 \cdot t} \cdot (t + 10)$$

$$G'(t) = -(-0.1) \cdot e^{-0.1 \cdot t} \cdot (t + 10) - e^{-0.1 \cdot t}$$

$$G'(t) = e^{-0.1 \cdot t} \cdot (0.1 \cdot t + 1 - 1) \qquad G'(t) = 0.1 \cdot t \cdot e^{-0.1 \cdot t}$$

Zum Vergleich: $t \cdot W'(t) = t \cdot \left(0.1 \cdot e^{-0.1 \cdot t}\right)$

$$T\_ = \lim_{t \to \infty} \int_0^t \tau \cdot W'_{0.1}(\tau)\, d\tau = \lim_{t \to \infty} \left[ -\underbrace{e^{-0.1 \cdot t} \cdot (t+10)}_{\to 0} + 10 \cdot \underbrace{e^{0}}_{\to \infty} \right]$$

Nebenrchnung:

$$\lim_{t \to \infty} \left[ -e^{-0.1 \cdot t} \cdot (t+10) \right] = \lim_{t \to \infty} \left( -\frac{\overset{\infty \uparrow}{t+10}}{\underset{\downarrow \infty}{e^{0.1 \cdot t}}} \right) \overset{\text{l. H.}}{=} \lim_{t \to \infty} \left( -\frac{1}{0.1 \cdot e^{0.1 \cdot t}} \right) = 0$$

$\Rightarrow \quad T\_ = 10$ Man muss als höchstens 10 Minuten auf eine freie Leitung warten.

$W\left(10, \frac{1}{10}\right) = 1 - e^{-1} = 0.632$ Die Wahrscheinlichkeit beträgt 63%.