Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2012

- **Mathematik 13 Nichttechnik - Aufgabe B I - Lösung**

Teilaufgabe 1.0
In einem kartesischen Koordinatensystem des IR^3 sind die Gerade

$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, die Ebene $E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $r, t, u \in IR$ und die

Ebenenschar F_m: $4\cdot x_1 - x_2 + (m-1)\cdot x_3 = 0$ mit $m \in IR$ gegeben.

Teilaufgabe 1.1 **(3 BE)**
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform.
[Mögliches Ergebnis: E: $9\cdot x_1 - x_2 + 11\cdot x_3 + 15 = 0$]

Ebene E in Parameterdarstellung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$M(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} -1 & 3 & x_1 - 1 \\ 2 & 5 & x_2 - 2 \\ 1 & -2 & x_3 + 2 \end{pmatrix}$$

1. und 2. Null erzeugen

$$M1(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & x_1 - 1 \\ 0 & -11 & 4 - x_2 - 2\cdot x_1 \\ 0 & -9 & 2\cdot x_3 - x_2 + 6 \end{pmatrix}$$

3. Null erzeugen

$$M2(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & x_1 - 1 \\ 0 & -11 & 4 - x_2 - 2\cdot x_1 \\ 0 & 0 & 2\cdot x_2 - 18\cdot x_1 - 22\cdot x_3 - 30 \end{pmatrix}$$

Ebene E auslesen

$$E(x_1, x_2, x_3) = 0 \rightarrow 2\cdot x_2 - 18\cdot x_1 - 22\cdot x_3 - 30 = 0$$

$$E(x_1, x_2, x_3)\ \text{Faktor} \ = -2\cdot(9\cdot x_1 - x_2 + 11\cdot x_3 + 15)$$

$$\Rightarrow \quad E: \quad 9\cdot x_1 - x_2 + 11\cdot x_3 + 15 = 0$$

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)
Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von g und E.

g $\cap$ E:

$9\cdot(5+r)-(13+2\cdot r)+11\cdot(3+3\cdot r)+15=0$ vereinfachen $\rightarrow 40\cdot r+80=0$

$40\cdot r+80=0$ auflösen, r $\rightarrow -2$

Ortsvektor zum Schnittpunkt:

$$OS := \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad S := OS^T \qquad S \rightarrow (3\ \ 9\ \ -3)$$

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)
Gegeben sind die Punkte **P(−1 / 3 / 7)** und **Q(2 / a / b)** mit **a, b** $\in$ **IR**.
Untersuchen Sie, ob es Werte für a und b gibt, für welche die Gerade g und die Gerade durch P und Q echt parallel sind.

Orstvektoren: $OP := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad OQ(a,b) := \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ b \end{pmatrix}$

Gerade durch P und Q:

$$x_{PQ}(\lambda,a,b) := OP+\lambda\cdot(OQ(a,b)-OP) \qquad x_{PQ}(\lambda,a,b) = \begin{bmatrix} 3\cdot\lambda-1 \\ \lambda\cdot(a-3)+3 \\ \lambda\cdot(b-7)+7 \end{bmatrix}$$

Richtungsvektor von Gerade g: $u_g := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor von Gerade durch P und Q: $u_{PQ}(a,b) := OQ(a,b)-OP = \begin{pmatrix} 3 \\ a-3 \\ b-7 \end{pmatrix}$

Gerade g parallel zu Gerade durch P und Q, wenn die Richtungsvektoren linear abhängig sind.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \tau\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ a-3 \\ b-7 \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow$$

$1=3\cdot\tau \quad\Rightarrow\quad \tau := \frac{1}{3}$

$2=\tau\cdot(a-3)$ auflösen, a $\rightarrow 9 \quad\Rightarrow\quad a := 9$

$3=\tau\cdot(b-7)$ auflösen, b $\rightarrow 16 \quad\Rightarrow\quad b := 16$

Gerade durch P und Q: $x_{PQ}(\lambda, a, b) = \begin{pmatrix} 3\cdot\lambda - 1 \\ 6\cdot\lambda + 3 \\ 9\cdot\lambda + 7 \end{pmatrix}$

$P \in g_{PQ}$? $\begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot\lambda - 1 \\ 6\cdot\lambda + 3 \\ 9\cdot\lambda + 7 \end{pmatrix}$

$5 = 3\cdot\lambda - 1$ auflösen, $\lambda \rightarrow 2$

$13 = 6\cdot\lambda + 3$ auflösen, $\lambda \rightarrow \frac{5}{3}$

$\Rightarrow$ $P \notin g_{PQ}$, die Geraden sind also echt parallel.

Teilaufgabe 1.4 (6 BE)
Begründen Sie, dass jede Ebene der Schar F_m die Ebene **E** in einer Schnittgeraden s_m schneidet. Ermitteln Sie sodann die Gleichung von s_2 (also $m = 2$).

Ebene E: $9\cdot x_1 - x_2 + 11\cdot x_3 + 15 = 0$

Ebene F_m: $4\cdot x_1 - x_2 + (m - 1)\cdot x_3 = 0$

Bei x_2 habem beide Ebenen den gleichen Koeffizienten, bei x_1 dagegen nicht, die Ebenen können also nicht parallel sein, es gibt eine Schnittgerade.

$E \cap F_2$:

Gauß-Schema:

$$\begin{pmatrix} 9 & -1 & 11 & -15 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(II) - (I)} \begin{pmatrix} 9 & -1 & 11 & -15 \\ -5 & 0 & -10 & 15 \end{pmatrix}$$

Wählen Sie: $x_3 = \tau$ $\Rightarrow$ $-5\cdot x_1 - 10\cdot\tau = 15$ auflösen, $x_1 \rightarrow -2\cdot\tau - 3$

$\Rightarrow$ $9\cdot(-2\cdot\tau - 3) - x_2 + 11\cdot\tau = -15$ auflösen, $x_2 \rightarrow -7\cdot\tau - 12$

Schnittgerade s_2: $x_S(\tau) := \begin{pmatrix} -2\cdot\tau - 3 \\ -7\cdot\tau - 12 \\ \tau \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 1.5 (5 BE)
Beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene $\mathbf{F_1}$ (also $\mathbf{m = 1}$) im Koordinatensystem.
Skizzieren Sie $\mathbf{F_1}$ in ein Koordinatensystem und geben Sie eine Gleichung von $\mathbf{F_1}$ in Parameterform an.

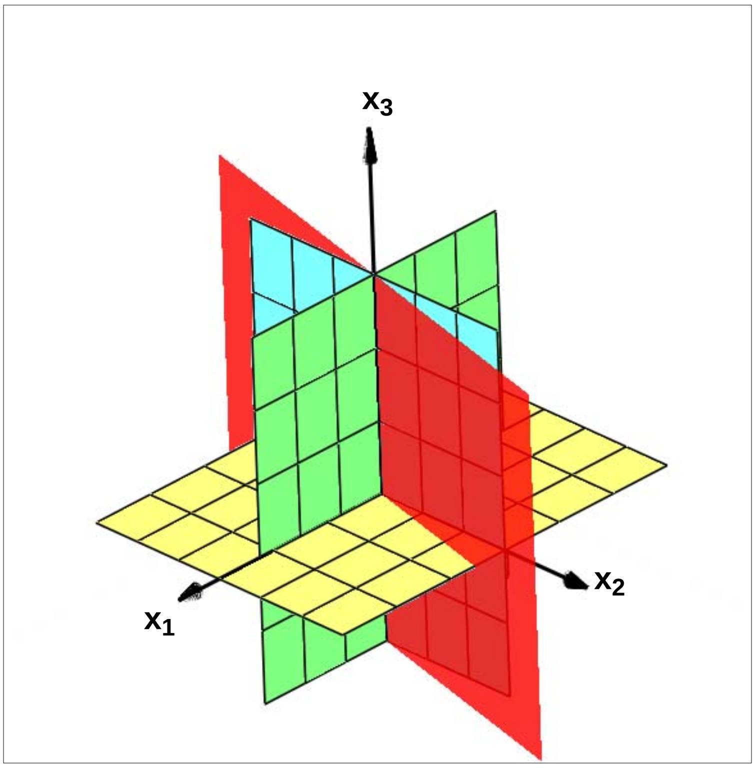
Ebene F_1: $\quad 4 \cdot x_1 - x_2 = 0$

x_3-Koordinate fehlt und kein Konstante, die Ebene enthält also die x_3-Achse.

Wahl dreier Punkte von F_1: $\quad \mathbf{OA} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{OB} := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{OC} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{F_1}(\mu, \rho) := \mu \cdot \mathbf{OB} + \rho \cdot \mathbf{OC} \qquad \mathbf{F_1}(\mu, \rho) = \begin{pmatrix} \mu \\ 4 \cdot \mu \\ \rho \end{pmatrix}$

Darstellung



Teilaufgabe 2.0
In einer Pflegeeinrichtung sind die Teilbereiche mobile Pflegdienste (M), Verwaltung (V) und technische Dienste (T) untereinander und mit dem Markt für Pflegeleistungen nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten. Statt Mengeneinheiten werden Arbeitseinheiten (AE) betrachtet, der Marktvektor beschreibt die Pflegezeit an den Pflegebedürftigen (= Arbeitszeit, die direkt für die Pflegebedürftigen aufgewendet wird) und der Produktiuonsvektor die Gesamtarbeitseinheiten in den unterschiedlichen Teilbereichen. Im Folgenden wird deshalb vom Pflegevektor $\vec{y}$ und vom Gesamtarbeitsvektor $\vec{x}$ gesprochen. Für die Verflechtung von M, V und T ergibt sich die Inputmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.25 & 0.2 & 0.5 \\ 0.05 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Teilaufgabe 2.1 (2 BE)
Interpretieren Sie die Bedeutung der Werte a_{22} und a_{31} der Inputmatrix A.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} M & V & T \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ V \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.25 & 0.2 & 0.5 \\ 0.05 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \end{array}$$

a_{22}: die Verwaltung benötigt für 1 AE 0.2 AE aus der Verwaltung selbst.

a_{31}: die mobilen Pflegedienste benötigen für 1 AE 0.05 AE Unterstützung vom technischen Dienst.

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)
Bestimmen Sie den Gesamtarbeitsvektor $\vec{x}$ für den Pflegevektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 64 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Inputmatrix: $A := \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.25 & 0.2 & 0.5 \\ 0.05 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$ Pflegevektor: $y := \begin{pmatrix} 64 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Grundgleichung für Verflechtungen: $(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{y}$

Definitionen

Zwischenrechnungen:

$$E - A = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.3 \\ -0.25 & 0.8 & -0.5 \\ -0.05 & -0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Zu lösendes Gleichungssystem:

$$(E - A)\cdot x(x_1, x_2, x_3) = y \rightarrow \begin{pmatrix} -0.3\cdot x_3 + 0.8\cdot x_1 + -0.2\cdot x_2 \\ 0.8\cdot x_2 + -0.25\cdot x_1 + -0.5\cdot x_3 \\ -0.05\cdot x_1 + -0.1\cdot x_2 + 0.8\cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Berechnungen

Gaußmatrix G aufstellen:

$$G = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.3 & 64 \\ -0.25 & 0.8 & -0.5 & 5 \\ -0.05 & -0.1 & 0.8 & 6 \end{pmatrix}$$

In Diagonalform bringen:

$$G_{diag} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 100.0 \\ 0 & 1.0 & 0.0 & 50.0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 20.0 \end{pmatrix}$$

Lösungsvektor $\vec{x}$ abrufen: $x = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix}$ als Gesamtarbeitsvektor

Teilaufgabe 2.3 (6 BE)
Die Pflegeeinrichtung soll einen weiteren Pflegebezirk übernehmen. Dabei werden die Gesamtarbeitseinheiten der Verwaltung doppelt so groß sein wie die für den technischen Dienst. Die mobilen Pflegedienste steigen auf 231 Gesamtarbeitseinheiten. Aus Kostengründen soll die Verwaltung höchstens 11 AE Pflegezeit an den Pflegebedürftigen erhalten. Berechnen Sie das sinnvolle Intervall für die Gesamtarbeitseinheiten der Verwaltung.

Neuer Gesamtarbeitsvekor:

$$x_{neu}(x_2) := \begin{pmatrix} 231 \\ x_2 \\ 0.5\cdot x_2 \end{pmatrix}$$

Neuer Pflegevektor:

$$y(x_2) := (E - A)\cdot (x_{neu}(x_2)) \rightarrow \begin{pmatrix} -0.35\cdot x_2 + 184.8 \\ 0.55\cdot x_2 - 57.75 \\ 0.3\cdot x_2 - 11.55 \end{pmatrix}$$

Bedingungen:

$$y(x_2)_1 \geq 0 \rightarrow -0.35\cdot x_2 + 184.8 \geq 0 \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, x_2 \\ \text{annehmen}, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow 0.0 \leq x_2 \leq 528.0$$

$$0 \leq y(x_2)_2 \leq 11 \rightarrow 0 \leq 0.55\cdot x_2 - 57.75 \leq 11 \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, x_2 \\ \text{annehmen}, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow 105.0 \leq x_2 \leq 125.0$$

$$y(x_2)_3 \geq 0 \rightarrow 0.3\cdot x_2 - 11.55 \geq 0 \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, x_2 \\ \text{annehmen}, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow 38.5 \leq x_2 < \infty$$

Lösung der Ungleichungen:

$$\begin{pmatrix} -0.35 \cdot x_2 + 184.8 \geq 0 \\ 0 \leq 0.55 \cdot x_2 - 57.75 \leq 11 \\ 0.3 \cdot x_2 - 11.55 \geq 0 \end{pmatrix} \text{auflösen}, x_2 \rightarrow 105.0 \leq x_2 \leq 125.0$$

Gesamtarbeitseinheiten der Verwaltung: $105.0 \leq x_2 \leq 125.0$

Teilaufgabe 2.4 **(5 BE)**
Die Pflegeeinrichtung betreibt auch Pflegeheime (stationäre Pflegedienste). In den stationären Pflegediensten (S) ist der Einsatz der Verwaltung um 40% geringer gegenüber den mobilen Pflegediensten, der Einsatz der Technik für die stationären Pflegedienste verdoppelt sich gegenüber den mobilen Pflegediensten. Alle anderen Werte der Inputmatix bleiben unverändert. Geben Sie die neue Inputmatrix an und erstellen Sie die Input-Output-Tabelle für den Gesamtarbeitsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 120 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} S & V & T \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ V \\ T \end{array} & A_{neu} := \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.25 - 0.4 \cdot 0.25 & 0.2 & 0.5 \\ 2 \cdot 0.05 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A_{neu} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.15 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Gesamtarbeitsvektor: $x := \begin{pmatrix} 120 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$ $\qquad E - A_{neu} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.3 \\ -0.15 & 0.8 & -0.5 \\ -0.1 & -0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$

Neuer Pflegevektor: $y := \left(E - A_{neu}\right) \cdot x$ $\qquad y = \begin{pmatrix} 77 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$

Berechnungen

Warenflussmatrix =

"Verflechtung"	"S"	"V"	"T"	"Pflege"	"Arbeit"
"S"	24	10	9	77	120
"V"	30	10	15	7	50
"T"	6	5	6	7	30