Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2012

- **Mathematik 13 Nichttechnik - Aufgabe B II - Lösung**

Teilaufgabe 1.0
Im IR³ sind die Punkte A(2/1/0), B(3/-2/-0,5) und C(-2/-2/2) sowie die Geraden

$$g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ t \end{pmatrix}$$ mi s, t $\in$ IR gegeben.

Teilaufgabe 1.1 **(5 BE)**
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, welche die Punkte A, B und C enthält, in parameterfreier Form.
[Mögliches Ergebnis: E: $x_1 + 2 \cdot x_3 - 2 = 0$]

Ortsvektoren: $OA := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad OB := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -0.5 \end{pmatrix}$ $\quad OC := \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

E: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + u \cdot \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)$

Richtungsvektoren: $OB - OA = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -0.5 \end{pmatrix}$ $\quad OC - OA = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ebene E in Parameterdarstellung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -0.5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$M(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} 1 & -4 & x_1 - 2 \\ -3 & -3 & x_2 - 1 \\ \frac{-1}{2} & 2 & x_3 \end{pmatrix}$$

1. und 2. Null erzeugen

$$M1(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & x_1 - 2 \\ 0 & -15 & 3 \cdot x_1 + x_2 - 7 \\ 0 & -\frac{15}{2} & \frac{x_2}{2} - 3 \cdot x_3 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. Null erzeugen

$$M2(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & x_1 - 2 \\ 0 & -15 & 3\cdot x_1 + x_2 - 7 \\ 0 & 0 & \frac{45\cdot x_1}{2} + 45\cdot x_3 - 45 \end{pmatrix}$$

Ebene E auslesen

$$E(x_1, x_2, x_3) = 0 \rightarrow \frac{45\cdot x_1}{2} + 45\cdot x_3 - 45 = 0$$

$$E(x_1, x_2, x_3) \text{ Faktor } = \frac{45\cdot(x_1 + 2\cdot x_3 - 2)}{2}$$

$\Rightarrow$ **E:** $x_1 + 2\cdot x_3 - 2 = 0$

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)
Geben Sie die Lage der Ebene E bezüglich des Koordinatensystems an und verdeutlichen Sie diese Lage durch ein möglichst aussagekräftige Skizze, welche auch die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von E enthält.

E: $x_1 + 2\cdot x_3 - 2 = 0$

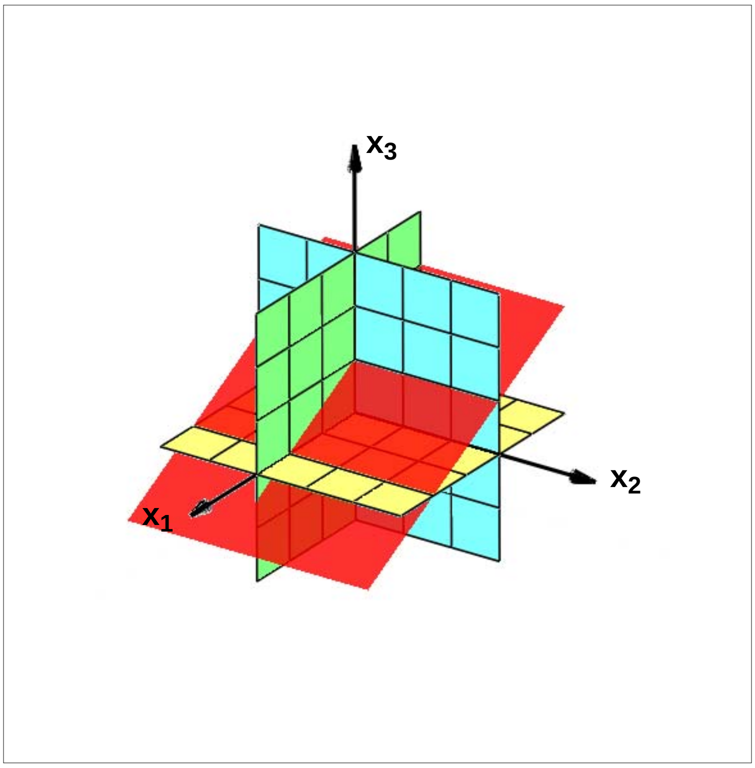
Ebene E ist parallel zur x_2-Achse.

Achsenabschnittsform: $\frac{x_1}{2} + \frac{x_3}{\frac{1}{2}} = 1$

Schnittpunkt mit der x_1-Achse: $S_1(2 / 0 / 0)$

Schnittpunkt mit der x_3-Achse: $S_3(/ 0 / 0{,}5)$

Darstellung



Teilaufgabe 1.3 (5 BE)
Bestimmen Sie die Lage von g_t gegenüber E in Abhängigkeit von t. Geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes an.

$g_t \cap E$:

$$(4 + 2 \cdot s) + 2 \cdot (-1 + s \cdot t) - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 + 2 \cdot s - 2 + 2 \cdot s \cdot t - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s \cdot (2 + 2 \cdot t) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

1. Fall: $2 + 2 \cdot t = 0$ **auflösen**, $t \rightarrow -1 \quad \Rightarrow$

Für $t = -1$ gibt es unendlich viele Schnittpunkte, d. h. $g_{-1} \subset E$.

2. Fall: $s = 0 \quad \Rightarrow$

Für $s = 0$ gibt es genau einen Schnittpunkt, $S(4 \,/\, 7 \,/\, -1)$

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)
Die Geraden g_t liegen alle in einer Ebene F. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Parameterform und geben Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s von E und F an.

Richutngsvektoren: $u_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad u_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ebene F in Parameterdarstellung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

F ∩ E:

$$(4 + 2 \cdot r + 2 \cdot u) + 2 \cdot (-1 + r + 2 \cdot u) - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot r + 6 \cdot u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = -\frac{3}{2} \cdot u$$

Schnittgerade s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{3}{2} \cdot u\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 2.0
Eine Molkerei (M), ein Unternehmen (U), welches einfache Milchprodukte veredelt, und ein landwirtschaftlicher Hof (H) sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell gemäß untenstehender Tabelle verknüpft. (Angaben in Mengeneinheiten ME)

∎	M	U	H	Markt	Produktion
M	20	50	5	25	a
U	b	40	0	200	250
H	40	0	10	c	50

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)
Bestimmen Sie die Werte für a, b und c und geben Sie die Bedeutung der Werte von b und c im Sinne der vorliegenden Thematik an.

$$a = 20 + 50 + 5 + 25 \quad \Rightarrow \quad a = 100$$

$$b + 40 + 0 + 200 = 250 \quad \Rightarrow \quad b = 10$$

$$40 + 10 + c = 50 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

Die Molkerei benötigt **b = 10** Mengeneinheiten vom Unternehmen U, um 100 ME produzieren können.
Der Hof gibt nichts an den Markt ab, da **c = 0**

Teilaufgabe 2.2 (8 BE)
Die Molkerei will nun ihre Marktabgabe auf 86 ME erhöhen. Die anderen Betriebe behalten ihre Marktabgabezahlen bei. Bestimmen Sie die hierfür notwendigen Produktionszahlen der drei Betriebe.

$$\textbf{Warenflussmatrix} := \begin{pmatrix} \text{"Verflechtung"} & \text{"M"} & \text{"U"} & \text{"H"} & \text{"y"} \\ \text{"M"} & 20 & 50 & 5 & 25 \\ \text{"U"} & 10 & 40 & 0 & 200 \\ \text{"H"} & 40 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnungen

Input-Output-Matrix: $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{25} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.16 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$

Neuer Verbrauchsvektor: $\quad \mathbf{y} := \begin{pmatrix} 86 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}$

Grundgleichung für Verflechtungen: $\quad (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}$

Definitionen

Zwischenrechnungen:

Inputmatrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.16 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0.84 & 0 \\ -0.4 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Zu lösendes Gleichungssystem:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{y} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4 \cdot x_1}{5} - \frac{x_2}{5} - \frac{x_3}{10} \\ \frac{21 \cdot x_2}{25} - \frac{x_1}{10} \\ \frac{4 \cdot x_3}{5} - \frac{2 \cdot x_1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnungen

Gaußmatrix G:

$$G = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & 86 \\ -\frac{1}{10} & \frac{21}{25} & 0 & 200 \\ -\frac{2}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.1 & 86 \\ -0.1 & 0.84 & 0 & 200 \\ -0.4 & 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

In Diagonalform:

$$G_{diag} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 184 \\ 0 & 1 & 0 & 260 \\ 0 & 0 & 1 & 92 \end{pmatrix}$$

Lösungsvektor $\vec{x}$ abrufen:

$$x = \begin{pmatrix} 184 \\ 260 \\ 92 \end{pmatrix}$$

Produktion_M = **184**

Produktion_U = **260**

Produktion_H = **92**

Teilaufgabe 2.3.0
Der landwirtschaftliche Hof ist nicht in der Lage, die unter 2.2 berechnete Produktionssteigerung zu leisten. Für diesen ist maximal eine Erhöhung auf 60 Mengeneinheiten möglich. Das Unternehmen U erhöht seine Produktion auf 255 Mengeneinheiten.

Teilaufgabe 2.3.1 (5 BE)
Bestimmen Sie rechnerisch das maximale Intervall, welches für die Produktionszahl der Molkerei in Frage kommt.
[Ergebnis: $x_1 \in [\ 71.25\ ;\ 120\ ]$]

Produktionsvektor: $x(x_1) := \begin{pmatrix} x_1 \\ 255 \\ 60 \end{pmatrix}$

$$y(x_1) := (E - A)\cdot x(x_1) = \begin{pmatrix} \frac{4\cdot x_1}{5} - 57 \\ \frac{1071}{5} - \frac{x_1}{10} \\ 48 - \frac{2\cdot x_1}{5} \end{pmatrix}$$

Es müssen folgende Ungleichungen gelten:

$$\begin{pmatrix} \frac{4\cdot x_1}{5} - 57 \ge 0 \\ \frac{1071}{5} - \frac{x_1}{10} \ge 0 \\ 48 - \frac{2\cdot x_1}{5} \ge 0 \end{pmatrix} \text{auflösen}, x_1 \rightarrow \frac{285}{4} \le x_1 \le 120$$

Teilaufgabe 2.3.2 (4 BE)
Bestimmen Sie die unter den gegebenen Bedingungen maximal mögliche Marktabgabe der Molkerei und die dadurch bedingten Marktabgabezahlen der beiden anderen Betriebe. Ermitteln Sie den Prozentsatz, um welchen die Molkerei somit ihre Marktabgabe gegenüber der Abgabe in 2.0 maximal steigern könnte.

$y_1 = \frac{4 \cdot x_1}{5} - 57$ y_1 ist maximal, wenn x_1 maximal ist.

$\Rightarrow$ $y(120) = \begin{pmatrix} 39 \\ 202.2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Abgabe der Molkerei in 2.0: 25 ME

Geänderter Prozentsatz : $\frac{39}{25} = 1.56$ $\frac{39}{25} = 156\,\%$

$\Rightarrow$ Steigerung der Marktabgabe um maximal 56%.