Gertrud Sälzle, Berufliche Oberschule Neu-Ulm

Einführung in Mathcad
Teil 3 - Elemente der Kurvendiskussion

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion **f** mit $f(x) := \frac{x^2 - 1}{2 \cdot x - 4}$ in der maximalen Definitionsmenge(1) $D_f \subset IR$.

Teilaufgabe 1.1

Bestimmen Sie D_f und die Nullstelle von **f** und geben Sie Art der Definitionslücken(2) von **f** an.

Nennerpolynom abrufen: $n(x) := \text{denom}(f(x)) \rightarrow 2 \cdot x - 4$

Nennernullstellen: $n(x) = 0 \rightarrow 2 \cdot x - 4 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 2$

Definitionsmenge: $D = IR \setminus \{ 2 \}$

Zählerpolynom: $z(x) := \text{numer}(f(x)) \rightarrow x^2 - 1$

Zählernullstellen: $x0 := z(x) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Nullstellen: $N_1(-1/0)$; $N_2(1/0)$ jeweils einfach

Art der Def.lücken: $x = 2$ Polstelle(3) 1.Ordnung

Teilaufgabe 1.2
Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle und damit Lage und Art der Extrema.

1. Ableitung bestimmen: $f_x(x) := \frac{d}{dx} f(x) \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{x^2 - 4 \cdot x + 1}{2 \cdot (x - 2)^2}$

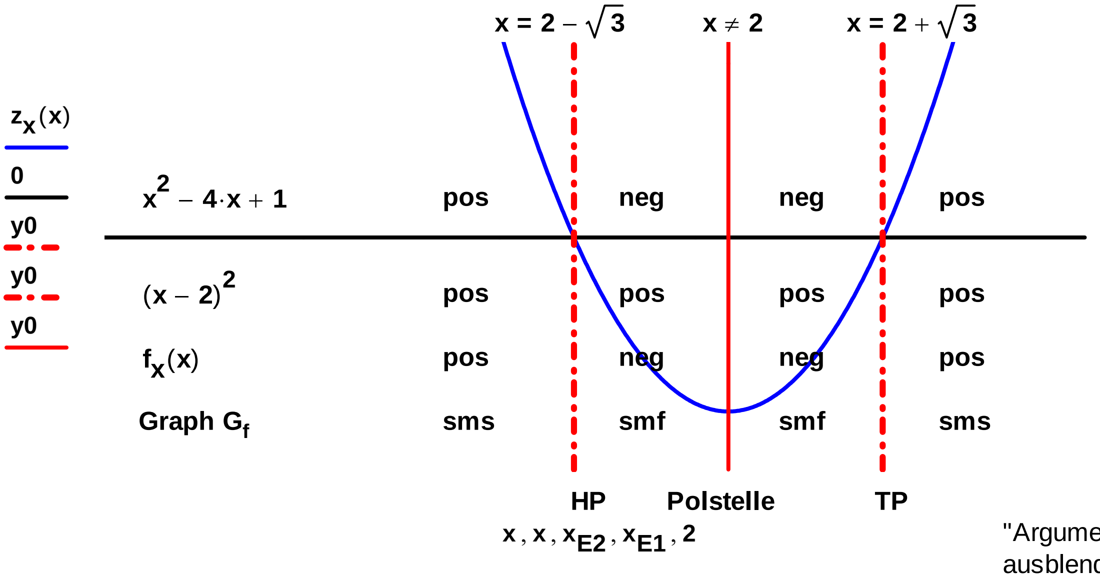
Zähler abrufen: $z_x(x) := \text{numer}\left(f_x(x)\right) \rightarrow x^2 - 4 \cdot x + 1$

Horizontale Tangenten: $z_x(x) = 0 \rightarrow x^2 - 4 \cdot x + 1 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3} + 2 \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Abrufen der Extrema: $\mathbf{xE} := \mathbf{z_x(x) = 0 \text{ auflösen}, x} \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ $\mathbf{y0} := -4..4$

$\mathbf{x_{E1} := xE_1}$ $\mathbf{x_{E1} = 3.732}$ $\mathbf{x_{E2} := xE_2}$ $\mathbf{x_{E2} = 0.268}$

Vorzeichentabelle



"Argumente ausblenden"

Funktionswerte: $\mathbf{f(x_{E2}) = 0.268}$ $\mathbf{f(x_{E1}) = 3.732}$

Hochpunkt: $\mathbf{HP := (x_{E2} \;\; f(x_{E2}))}$ $\mathbf{HP = (0.268 \;\; 0.268)}$

Tiefpunkt: $\mathbf{TP := (x_{E1} \;\; f(x_{E1}))}$ $\mathbf{TP = (3.732 \;\; 3.732)}$

Teilaufgabe 1.3
Zerlegen Sie den Funktionsterm f(x) durch Polynomdivision mit Rest in einen ganzrationalen und echt gebrochenrationalen Term und untersuchen Sie das Verhalten für $|x| \rightarrow \infty$.

$$\mathbf{f(x) \text{ parfrac }} \rightarrow \frac{x}{2} + \frac{3}{2\cdot(x-2)} + 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\frac{x}{2} + \frac{3}{2\cdot(x-2)} + 1\right] \rightarrow -\infty \qquad \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x}{2} + \frac{3}{2\cdot(x-2)} + 1\right] \rightarrow \infty$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad\qquad 0$$

Sonderzeichen:
Ansicht, Symbolleisten, Ressourcen, QuickSheets, Gesonderte Rechenzeichen

Schiefe Asymptote: $g(x) := \frac{x}{2} + 1$

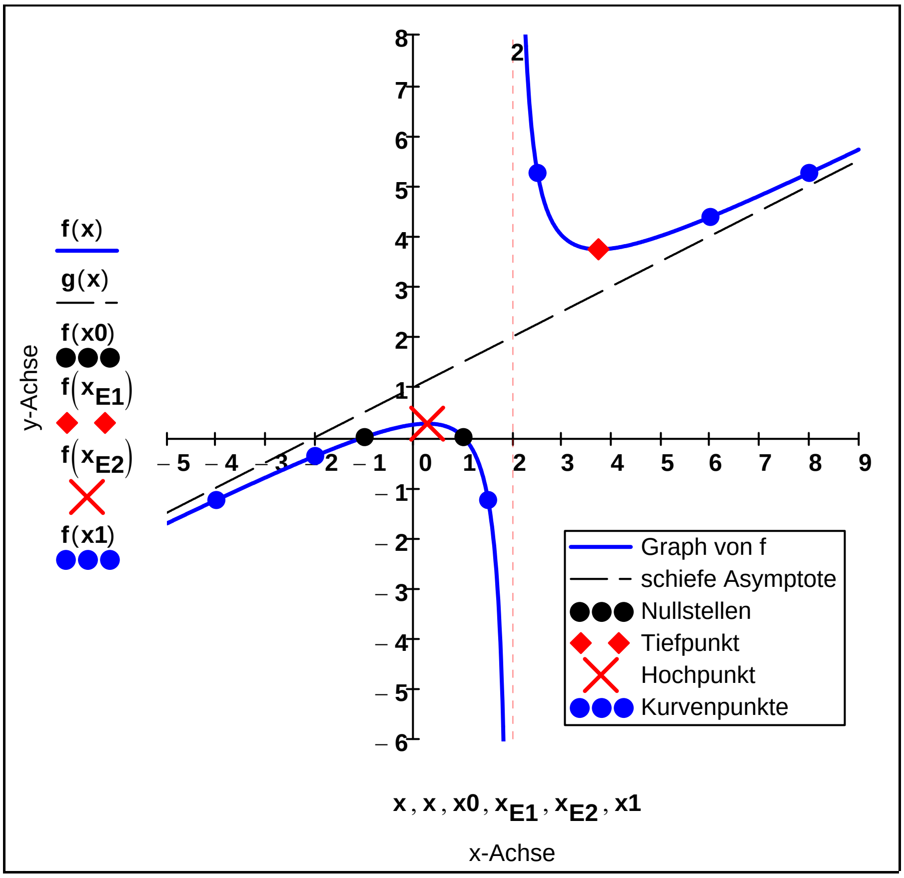
Teilaufgabe 1.4
Untersuchen Sie das Verhalten des Graphen der Funktion **f** bei Annäherung an die Polstelle $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2^-} \left(\frac{\overset{\overset{3}{\uparrow}}{x^2 - 1}}{\underset{\underset{0^-}{\downarrow}}{2 \cdot x - 4}} \right) \to -\infty \qquad \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{\overset{\overset{3}{\uparrow}}{x^2 - 1}}{\underset{\underset{0^+}{\downarrow}}{2 \cdot x - 4}} \right) \to \infty$$

Teilaufgabe 2
Zeichnen Sie den Graphen G_f der Funktion **f** mit allen bisherigen Ergebnissen und weiteren geeigneten Funktionswerten.

$x1 := (-4 \quad -2 \quad 1.5 \quad 2.5 \quad 6 \quad 8)^T$

"T" ist der transponierte Vektor:
Er verwandelt den Zeilenvektor in einen Spaltenvektor und umgekehrt.



x1 =

-4.0
-2.0
1.5
2.5
6.0
8.0

Berechnete Funktionswerte

f(x1) =

-1.3
-0.4
-1.3
5.3
4.4
5.3

Teilaufgabe 3
Bestimmen Sie den x-Wert, für den die y-Werte der Funktion von den y-Werten der schiefen Asymptote um höchstens $\varepsilon = \varepsilon_0$ abweichen.

$$\varepsilon_0 := 0.1$$

$$|g(x) - f(x)| \le \varepsilon_0 \rightarrow \left| \frac{x}{2} - \frac{x^2 - 1}{2 \cdot x - 4} + 1 \right| \le 0.1$$

Betragsterm vereinfachen: $g(x) - f(x) \text{ vereinfachen } \rightarrow -\frac{3}{2 \cdot (x - 2)}$

Da der Zähler negativ ist, entscheidet der Term $x - 2$ das Vorzeichen.

$$g(x) - f(x) > 0 \text{ vereinfachen } \rightarrow -\frac{3}{2 \cdot (x-2)} > 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow x < 2$$

$$g(x) - f(x) < 0 \text{ vereinfachen } \rightarrow -\frac{3}{2 \cdot (x-2)} < 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 2 < x$$

Jetzt lösen der konkreten Betragsungleichung:

$$|g(x) - f(x)| \le \varepsilon_0 \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{3}{2 \cdot |x - 2|} \le \frac{1}{10} \text{ auflösen}, x \rightarrow x \le -13 \vee 17 \le x$$

Lösen der allgemeinen Betragsungleichung:

$$\left| -\frac{3}{2 \cdot (x-2)} \right| \le \varepsilon \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, \varepsilon > 0 \\ \text{annehmen}, x > 2 \end{array} \right. \rightarrow \frac{4 \cdot \varepsilon + 3}{2 \cdot \varepsilon} \le x$$

Rechte Grenze: $x_r(\varepsilon) := \frac{4 \cdot \varepsilon + 3}{2 \cdot \varepsilon}$ $\qquad x_r(0.1) = 17$

$$\left| -\frac{3}{2 \cdot (x-2)} \right| \le \varepsilon \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, \varepsilon > 0 \\ \text{annehmen}, x < 2 \end{array} \right. \rightarrow x \le \frac{4 \cdot \varepsilon - 3}{2 \cdot \varepsilon}$$

Linke Grenze: $x_l(\varepsilon) := \frac{4 \cdot \varepsilon - 3}{2 \cdot \varepsilon}$ $\qquad x_l(0.1) = -13$