Die Betragsfunktion

- **Einführung und Aufgaben**

Definition

Der ***absolute Betrag*** einer Zahl a ist folgendermaßen definiert:

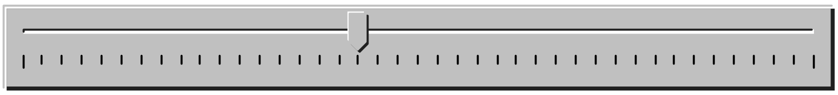
$$|a| = \begin{cases} a & \text{if } a > 0 \\ 0 & \text{if } a = 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

Geometrische Interpretation

Die reellen Zahlen werden durch Punkte auf der Zahlengeraden veranschaulicht. Dabei werden die Zahlen $-\mathbf{a}$ und $\mathbf{a}$ in der gleichen Entfernung vom Koordinatenursprung abgetragen.

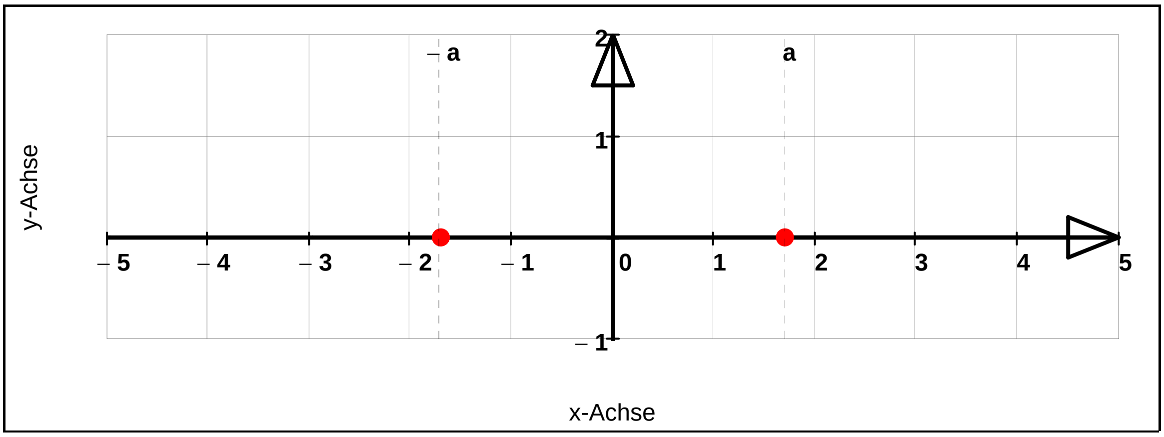
Man sagt: Die beiden Zahlen $-\mathbf{a}$ und $\mathbf{a}$ haben denselben **Betrag**.

Wahl von a:



Darstellung

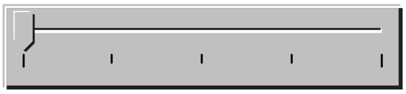
Zahl:	$-a = -1.7$	$a = 1.7$
Abstand von (0/0):	$\lvert -a \rvert = 1.7$	$\lvert a \rvert = 1.7$



Anwendung

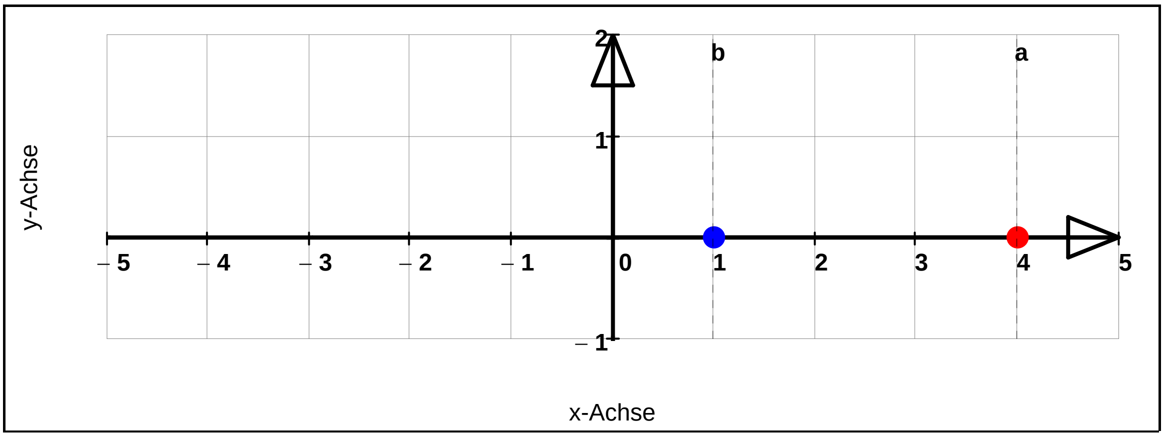
Untersuchen Sie mit dem Schieberegler den Abstand d zwischen zwei Zahlen a und b auf der x-Achse. Geben Sie eine allgemeingültige Berechnungsvorschrift an.

Wahl von a und b:



Zahl $\mathbf{a} = \mathbf{4}$

Zahl $\mathbf{b} = \mathbf{1}$



Differenzen der Koordinatenwerte: $\mathbf{a - b = 3}$ $\mathbf{b - a = -3}$

Abstand: $\mathbf{d := |a - b|}$ $\mathbf{|a - b| = 3}$

Lösung:

Abstand d zwischen zwei Zahlen a und b:

$$\mathbf{d = |a - b| = |b - a| = \left| \begin{array}{l} a - b \quad \text{if} \quad a > b \\ 0 \quad \text{if} \quad a = b \\ -(a - b) \quad \text{if} \quad a < b \end{array} \right.}$$

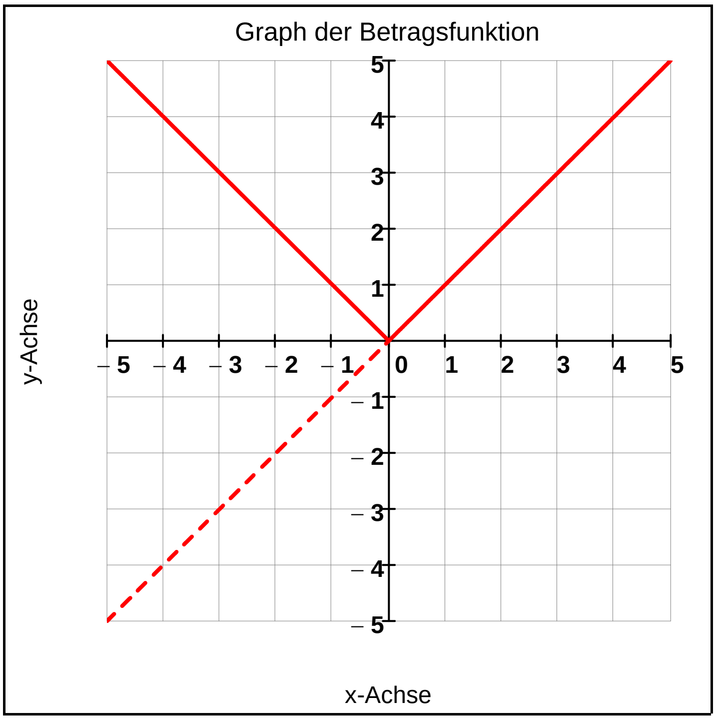
Definition der Betragsfunktion

Die Funktion **f:** $x \mapsto |x|$ heißt Betragsfunktion.

In vielen Anwendungen wird die *betragsfreie Darstellung* des Funktionsterms f verwendet und es gilt:

$$f(x) = |x| \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ (-x) & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) := |x|$$



Anschaulich bedeutet dies, dass der negative Teil der Argumentfunktion y = x (gestrichelt) an der x-Achse gespiegelt wird.

Aufgabe 1

Schreiben Sie folgende Funktionsterme $g_i(x)$ betragsfrei und zeichnen Sie jeweils den Graphen der Funktion g_i.
Beschreiben Sie auch, wie sich der Graph von g_i im Vergleich zur Funktion f mit $f(x) = |x|$ jeweils ändert.

a) $g_1(x) := |x - 2|$

b) $g_2(x) := |x + 2|$

c) $g_3(x) := 2 \cdot |x - 2|$

d) $g_4(x) := |x - 2| + 3$

e) $g_5(x) := |2 - x|$

f) $g_6(x) := \left|\frac{1}{2} \cdot x - 2\right|$

Lösungen Aufgabe 1

Zusammengesetzte Betragsfunktionen

Bei zusammengesetzten Betragsfunktionen wird eine Fallunterscheidung für jeden einzelnen Betragsterm nötig. Da jeder Term für sich positiv oder negativ sein kann, müssen alle möglichen Vorzeichenkombinationen untersucht werden.
Zum Zeichnen ohne CAS wird wieder die betragsfreie Darstellung benötigt.

Beispiel: $f(x) := |x + 1| + |3 - x|$

1. Fall: $x + 1 > 0 \wedge 2 - x > 0$ **auflösen** $\rightarrow -1 < x < 2$

$\Rightarrow f_1(x) := (x + 1) + (2 - x) = 3$

2. Fall: $x + 1 < 0 \wedge 2 - x < 0$ **auflösen** $\rightarrow$ keine Lösung

3. Fall: $x + 1 > 0 \wedge 2 - x < 0$ **auflösen** $\rightarrow 2 < x$

$\Rightarrow f_2(x) := (x + 1) - (2 - x) = 2 \cdot x - 1$

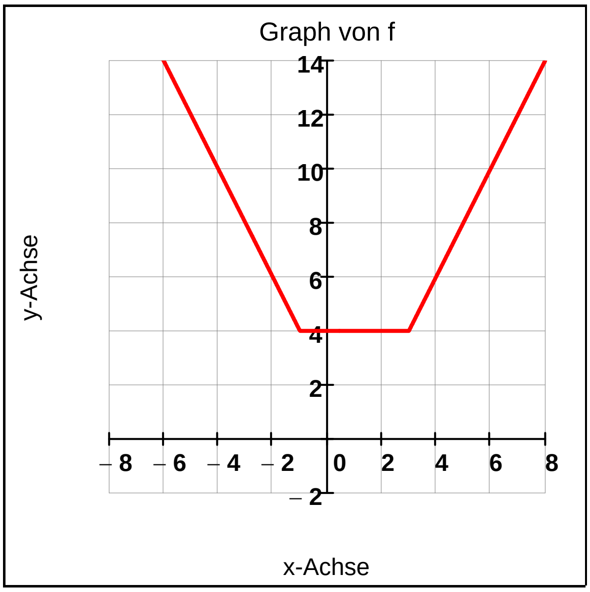
4. Fall:

$\Rightarrow f_3(x) := -(x + 1) + (2 - x) = 1 - 2 \cdot x$

Betragsfreie Darstellung:

$$f(x) = \begin{cases} (1 - 2 \cdot x) & \text{if } x \le -1 \\ 3 & \text{if } -1 < x < 2 \\ (2 \cdot x - 1) & \text{if } x \ge 2 \end{cases}$$

Bemerkung:
Die Gleichheitszeichen, die in der Fallunterscheidung fehlen, werden für jede Nahtstelle nur einmal definiert.

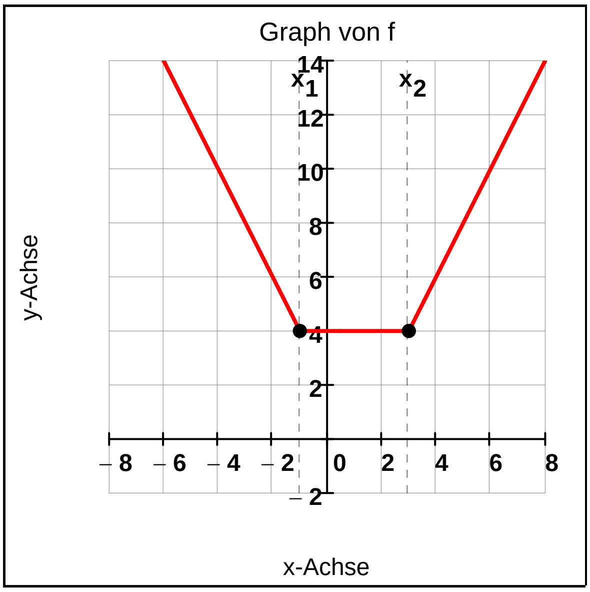


Zusammengesetzte Betragsfunktionen mit CAS

- Das CAS kann den Graphen der Betragsfunktion direkt zeichen.
- Die Grenzen können entweder direkt abgelesen werden oder nach einer Fallunterscheidung festgelegt werden.
- Die einzelnen Funktionsterme werden mit dem CAS-Schlüsselwort ***annehmen*** ausgewertet.

$f(x) = |x+1| + |3-x|$

Grenzen: $x_1 := -1$ $x_2 := 3$



Betragsfreie Darstellung:

$f_1(x) := f(x)$ **annehmen**, $x < x_1 \;\rightarrow 2 - 2\cdot x$

$f_2(x) := f(x)$ **annehmen**, $x > x_1 \wedge x < x_2 \;\rightarrow 4$

$f_3(x) := f(x)$ **annehmen**, $x > x_2 \;\rightarrow 2\cdot x - 2$

Die abschnittsweise definierte Darstellung des Funktionsterms muss händisch erstellt werden.

$$f(x) = \begin{cases} (2 - 2\cdot x) & \text{if } x < -1 \\ 4 & \text{if } -1 \le x \le 3 \\ (2\cdot x - 2) & \text{if } x > 3 \end{cases}$$

Aufgabe 2

Schreiben Sie folgende Funktionsterme $h_i(x)$ betragsfrei und geben Sie jeweils die Definitionsmenge an.
Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen h_i mit den entsprechenden Punkten auf der Nahtstelle, sofern sie definiert sind.

a) $h_1(x) := |x + 2| - |x - 1|$

b) $h_2(x) := |x + 3| + |x - 2|$

c) $h_3(x) := \left|\dfrac{x - 2}{x + 1}\right|$

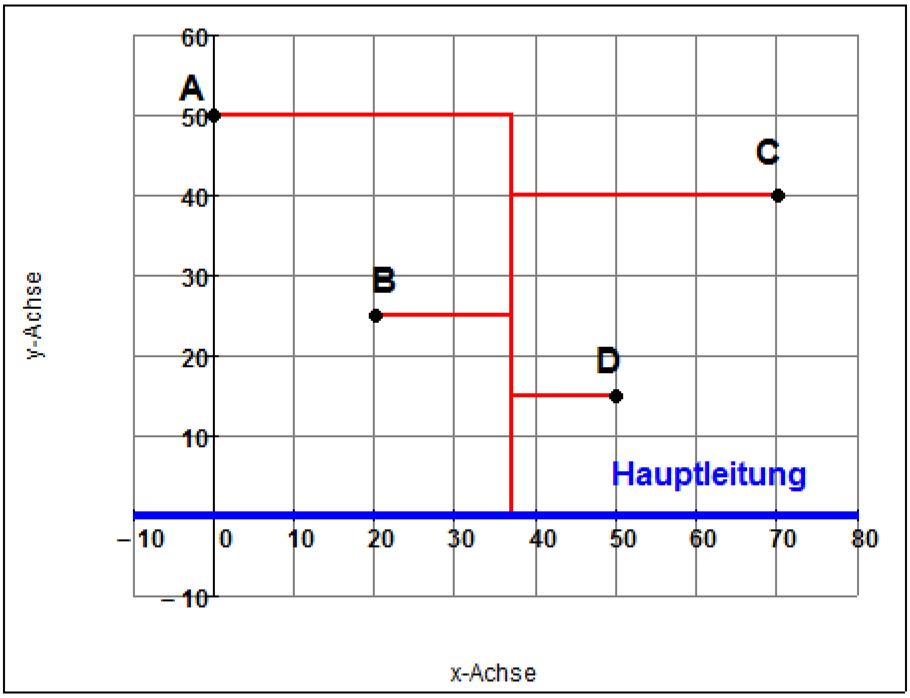
d) $h_4(x) := \dfrac{|x| + 1}{|x - 1| - 1}$

<u>Lösungen Aufgabe 2</u>

Aufgabe 3

Drei Häuser A(0/50), B(20/25) und C(70/40) werden an die Hauptgasleitung (x-Achse) angeschlossen. Die Quartier-Nebenleitung soll rechtwinklig an die Hauptleitung angeschlossen werden und die Hauszuleitungen rechtwinklig an die Nebenleitung.

a) Wo muss die Nebenleitung platziert werden, damit möglichst wenig gegraben werden muss?
   Wie groß ist die Länge aller benötigten Rohre.
b) Geben Sie mithilfe von CAS die betragsfreie Darstellung an.
c) Es wird noch ein viertes Haus D(50/15) geplant. Wo muss jetzt die Nebenleitung gelegt werden?
   Wie groß ist die Länge aller benötigten Rohre.
d) Geben Sie mithilfe von CAS die betragsfreie Darstellung an.



<u>Lösung Aufgabe 3</u>