Die Betragsfunktion

- **Aufgaben und Lösungen**

made with mathcad

Aufgabe 2

Schreiben Sie folgende Funktionsterme $h_i(x)$ betragsfrei und geben Sie jeweils die Definitionsmenge an.
Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen h_i mit den entsprechenden Punkten auf der Nahtstelle, sofern sie definiert sind.

a) $h_1(x) := |x+2| - |x-1|$

b) $h_2(x) := |x+3| + |x-2|$

c) $h_3(x) := \left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|$

d) $h_4(x) := \dfrac{|x|+1}{|x-1|-1}$

Teilaufgabe a)

Funktionsterm: $h_1(x) = |x+2| - |x-1|$

Definitionsmenge: **D = IR**

Fallunterscheidung:

1. Fall: $x+2>0 \wedge x-1>0$ **auflösen** $, x \rightarrow 1<x$

Funktionsterm: $|x+2| - |x-1|$ **annehmen** $, x>1 \rightarrow 3$

2. Fall: $x+2<0 \wedge x-1<0$ **auflösen** $, x \rightarrow x<-2$

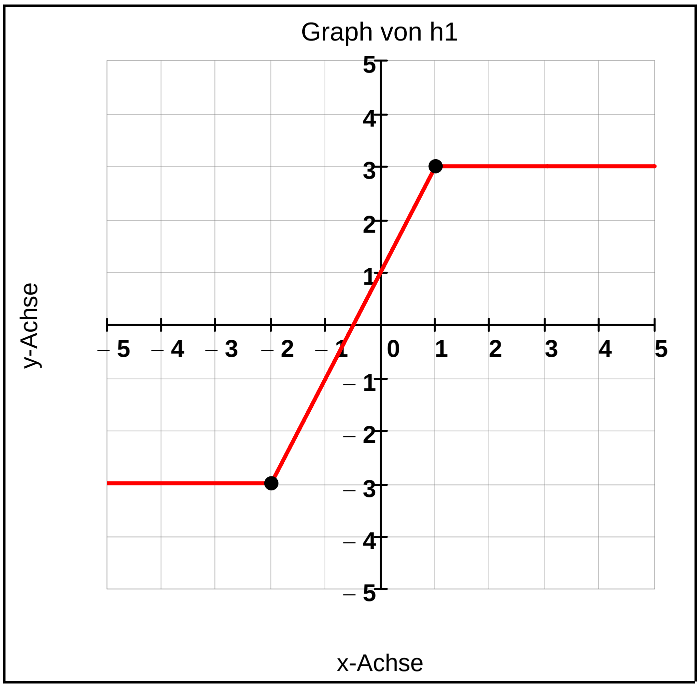
Funktionsterm: $|x+2| - |x-1|$ **annehmen** $, x<-2 \rightarrow -3$

3. Fall: $x+2>0 \wedge x-1<0$ **auflösen** $, x \rightarrow -2<x<1$

Funktionsterm: $|x+2| - |x-1|$ **annehmen** $, -2<x<1 \rightarrow 2\cdot x+1$

4. Fall: $x+2<0 \wedge x-1>0$ **auflösen** $, x \rightarrow$ keine Lösung

$$h_1(x) := \begin{cases} -3 & \text{if } x \le -2 \\ 2\cdot x+1 & \text{if } -2<x<1 \\ 3 & \text{if } x \ge 1 \end{cases}$$



Teilaufgabe b)

Funktionsterm: $h_2(x) = |x-2| + |x+3|$

Definitionsmenge: **D = IR**

Fallunterscheidung:

1. Fall: $x-2>0 \wedge x+3>0$ auflösen, x $\rightarrow 2<x$

Funktionsterm: $|x-2| + |x+3|$ annehmen, $x>2$ $\rightarrow 2\cdot x+1$

2. Fall: $x-2<0 \wedge x+3<0$ auflösen, x $\rightarrow x<-3$

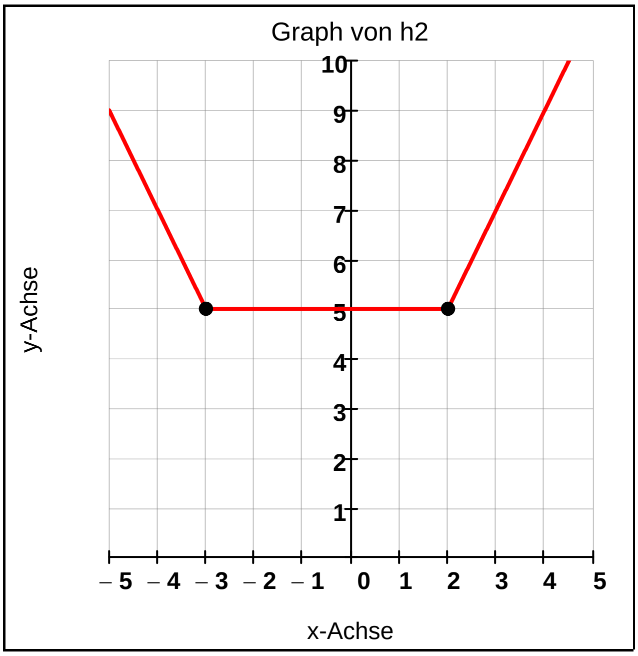
Funktionsterm: $|x-2| + |x+3|$ annehmen, $x<-3$ $\rightarrow -2\cdot x-1$

3. Fall: $x-2<0 \wedge x+3>0$ auflösen, x $\rightarrow -3<x<2$

Funktionsterm: $|x-2| + |x+3|$ annehmen, $-3<x<2$ $\rightarrow 5$

4. Fall: $x-2>0 \wedge x+3<0$ auflösen, x $\rightarrow$ keine Lösung

$$h_2(x) := \begin{cases} -2\cdot x-1 & \text{if } x<-3 \\ 5 & \text{if } -3\le x\le 2 \\ 2\cdot x+1 & \text{if } x>2 \end{cases}$$



Teilaufgabe c)

Funktionsterm: $h_3(x) = \dfrac{|x-2|}{|x+1|}$

Nullstellen des Nenners: $x + 1 = 0$ **auflösen**, $x \;\rightarrow -1$

Definitionsmenge: $D = \mathrm{IR} \setminus \{ -1 \}$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $x - 2 > 0 \wedge x + 1 > 0$ **auflösen**, $x \;\rightarrow 2 < x$

Funktionsterm: $\dfrac{|x-2|}{|x+1|}$ **annehmen**, $x > 2 \;\rightarrow \dfrac{x-2}{x+1}$

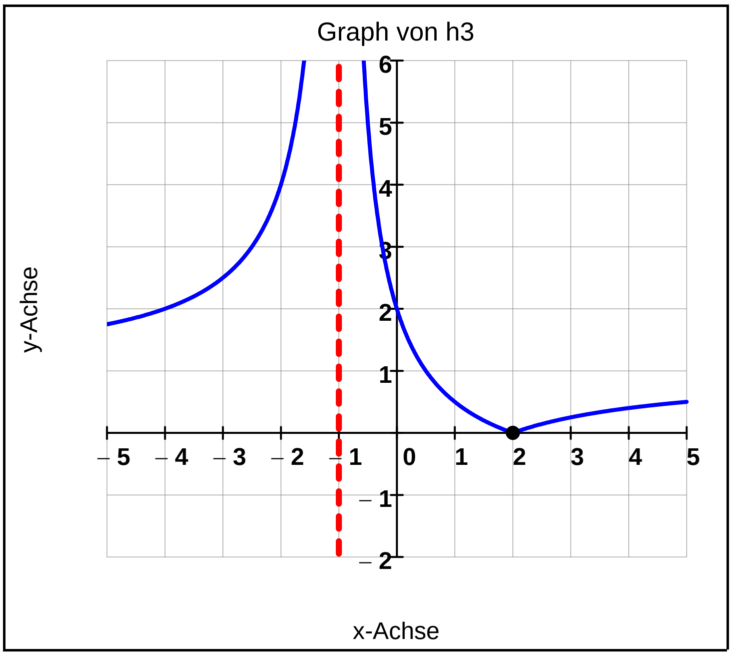
2. Fall: $x - 2 < 0 \wedge x + 1 < 0$ **auflösen**, $x \;\rightarrow x < -1$

Funktionsterm: $\dfrac{|x-2|}{|x+1|}$ **annehmen**, $x < -1 \;\rightarrow \dfrac{x-2}{x+1}$

3. Fall: $x - 2 < 0 \wedge x + 1 > 0$ **auflösen**, $x \;\rightarrow -1 < x < 2$

Funktionsterm: $\dfrac{|x-2|}{|x+1|}$ **annehmen**, $-1 < x < 2 \;\rightarrow -\dfrac{x-2}{x+1}$

4. Fall: $x - 2 > 0 \wedge x + 1 < 0$ **auflösen**, $x \;\rightarrow$ keine Lösung



$$h_3(x) := \begin{cases} \dfrac{x-2}{x+1} & \text{if } x < -1 \\ -\dfrac{x-2}{x+1} & \text{if } -1 < x < 2 \\ \dfrac{x-2}{x+1} & \text{if } x \geq 2 \end{cases}$$

Teilaufgabe c)

Funktionsterm: $h_4(x) = \dfrac{|x| + 1}{|x-1| - 1}$

Nullstellen des Nenners:

$|x-1| - 1 = 0 \; \left| \begin{array}{l} \text{annehmen}, x > 1 \\ \text{auflösen}, x \end{array} \right. \rightarrow 2$

$|x-1| - 1 = 0 \; \left| \begin{array}{l} \text{annehmen}, x < 1 \\ \text{auflösen}, x \end{array} \right. \rightarrow 0$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{ 0 ; \; 2 \}$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $x > 0 \wedge x - 1 > 0$ auflösen, $x \rightarrow 1 < x$

Funktionsterm: $\dfrac{|x| + 1}{|x-1| - 1}$ annehmen, $x > 1 \rightarrow \dfrac{x+1}{x-2}$

2. Fall: $x < 0 \wedge x - 1 < 0$ auflösen, $x \rightarrow x < 0$

Funktionsterm: $\dfrac{|x| + 1}{|x-1| - 1}$ annehmen, $x < 0 \rightarrow \dfrac{x-1}{x}$

3. Fall: $x > 0 \wedge x - 1 < 0$ auflösen, $x \rightarrow 0 < x < 1$

Funktionsterm: $\dfrac{|x| + 1}{|x - 1| - 1}$ annehmen, $0 < x < 1 \rightarrow -\dfrac{x + 1}{x}$

4. Fall: $x < 0 \wedge x - 1 > 0$ auflösen, $x \rightarrow$ keine Lösung

$$h_4(x) := \begin{cases} \dfrac{x - 1}{x} & \text{if } x < 0 \\ -\dfrac{x + 1}{x} & \text{if } 0 < x < 1 \\ \dfrac{x + 1}{x - 2} & \text{if } x \geq 1 \wedge x \neq 2 \end{cases}$$