Näherungsverfahren für Quadratwurzeln -
Das Heron-Verfahren (Babylonisches Wurzelziehen)

Historisches

Im Zusammenhang mit der Ausmessung von Flächen, insbesondere der Landvermessung, entwickelten die Babylonier bereits etwa 1700 vor Chr. auf Keilschriften überlieferte Verfahren zur Lösung von quadratischen Gleichungen. Als Vorstufe dazu gilt die Bestimmung von Quadratwurzeln. Das Verfahren wurde später etwa 100 nach Chr. von Heron von Alexandria (griechischer Wissenschaftler, Mathematiker, Physiker, Techniker, Ingenieur) aufgegriffen und beschrieben. Das Lösen von Quadratwurzeln nach dieser Methode wird auch ***Heron-Verfahren*** genannt.

Problemstellung

Gegeben sei eine Zahl a. Gesucht ist eine Zahl x mit der Eigenschaft $x \cdot x = a$

In moderner Schreibweise ist also die Quadratwurzel aus a gesucht: $x = \sqrt{a}$

Geometrische Interpretation

Gesucht ist die Seitenlänge x eines Quadrats vom Flächeninhalt a FE (Flächeneinheiten).
Dazu wird zunächst ein Rechteck konstruiert vom Flächeninhalt a FE. Die erste Seite hat die Länge $x_0 = a$ LE (Längeneinheiten), die zweite Seite $y_0 = 1$ LE.

Nun werden die Seiten Schritt für Schritt so verändert, dass das Rechteck einem Quadrat immer ähnlicher wird.

1. Näherung: $x_1 = \frac{x_0 + y_0}{2} = \frac{a+1}{2}$; $\quad y_1 = \frac{a}{x_1}$

2. Näherung: $x_2 = \frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_1 + \frac{a}{x_1} \right)$ $\quad y_2 = \frac{a}{x_2}$

(n+1)-te Näherung: $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ $\quad y_{n+1} = \frac{a}{x_{n+1}}$

Umformung: $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$

Dieses Verfahren wird solange durchgeführt, bis die Genauigkeit ausreicht.

Beispiel

Bestimmen Sie mithilfe des Heron-Verfahrens einen Näherungswert für $\sqrt{2}$ auf fünf Nachkommastellen genau.

Gegeben: $a := 2$

Ansatz: $x_0 := a$ $\qquad y_0 := 1$

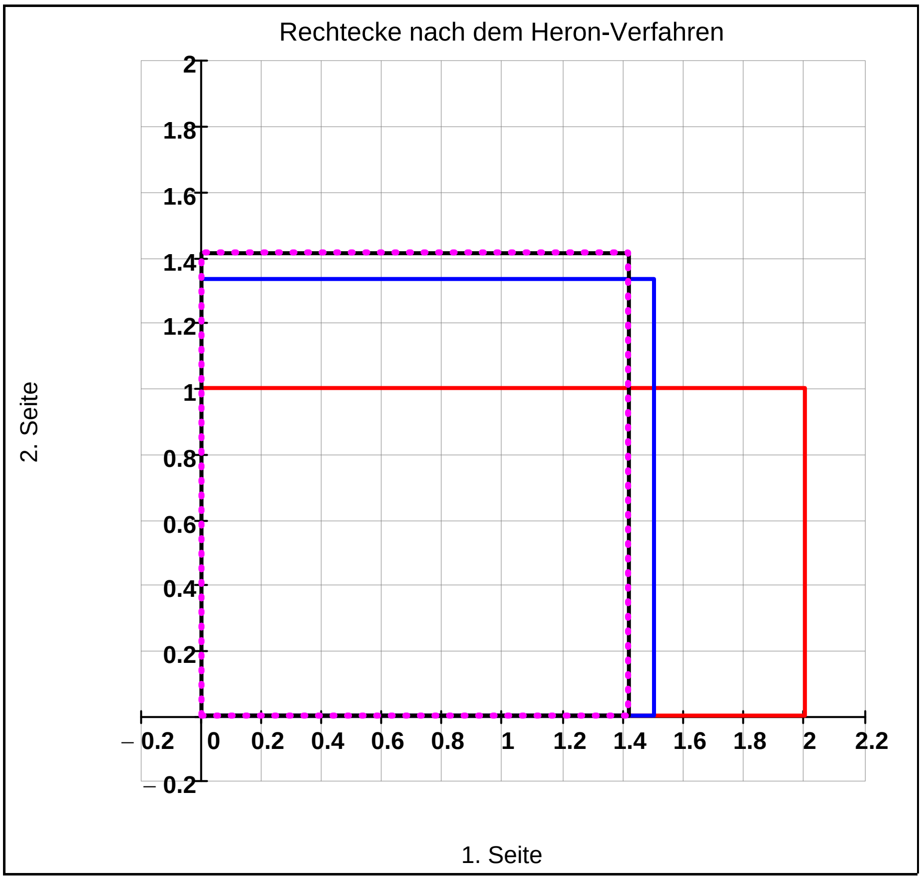
1. Näherung: $x_1 := \frac{x_0 + y_0}{2}$ $\qquad x_1 = 1.5$ $\qquad y_1 := \frac{a}{x_1}$ $\qquad y_1 = 1.333$

2. Näherung: $x_2 := \frac{x_1 + y_1}{2}$ $\qquad x_2 = 1.416667$ $\qquad y_2 := \frac{a}{x_2}$ $\qquad y_2 = 1.411765$

3. Näherung: $x_3 := \frac{x_2 + y_2}{2}$ $\qquad x_3 = 1.414216$ $\qquad y_3 := \frac{a}{x_3}$ $\qquad y_3 = 1.414211$

4. Näherung: $x_4 := \frac{x_3 + y_3}{2}$ $\qquad x_4 = 1.414214$ $\qquad y_4 := \frac{a}{x_4}$ $\qquad y_4 = 1.414214$

Darstellung



Das Verfahren in Mathcad:

Gesucht ist die Wurzel aus $a := 5$, also $\sqrt{a} = \sqrt{5}$

Führen Sie dabei $n := 5$ Schritte aus. $i := 0 .. n$

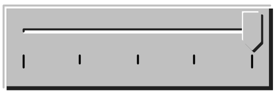
Start mit dem Näherungswert: $x_0 := a$ $y_0 := 1$

Der rekursive Algorithmus: $x_{i+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(x_i + \frac{a}{x_i} \right)$ $y_i := \frac{a}{x_i}$

Das Ergebnis: 1. Seite: 2. Seite: Unterschied:

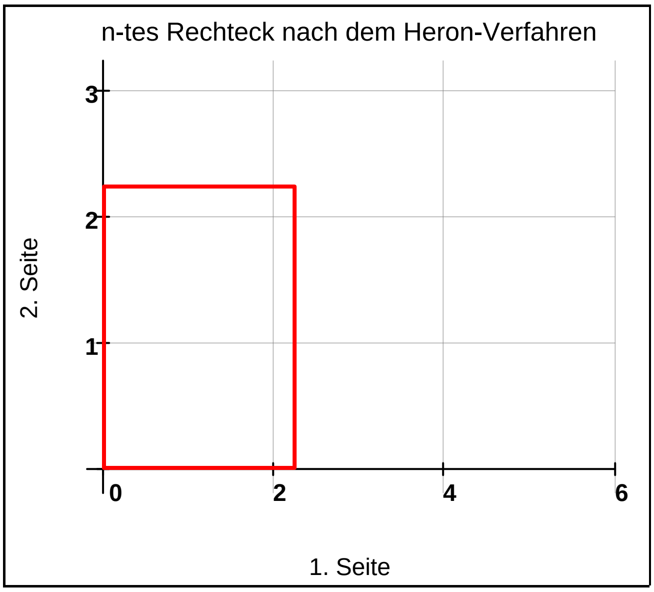
$i =$	$x_i =$	$y_i =$	$x_i - y_i =$
0	5	1	4
1	3	1.666666667	1.333
2	2.333333333	2.142857143	0.19
3	2.238095238	2.234042553	$4.053 \cdot 10^{-3}$
4	2.236068896	2.236067059	$1.836 \cdot 10^{-6}$
5	2.236067977	2.236067977	$3.766 \cdot 10^{-13}$

Wahl der Näherung:



Darstellung

Näherung = "vierte"



$x_i =$
5
3
2.33333
2.2381
2.23607
2.23607

Mathcadlösung:

$\sqrt{a} = 2.23607$

Programmierung in Mathcad:

```
Heron(a, ε) := | x ← a
               | y ← 1
               | while  x^2 − a > ε
               |   | x_neu ← (x + y)/2
               |   | y_neu ← a / x_neu
               |   | x ← x_neu
               |   | y ← y_neu
               | return  x
```

Konkrete Wurzeln:

Festlegung der Genauigkeit: $\varepsilon := 10^{-6}$

Z. B. Wurzel aus 2: $\mathrm{Heron}(2, \varepsilon) = 1.414214$

Z. B. Wurzel aus 3: $\mathrm{Heron}(3, \varepsilon) = 1.732051$

Anwendung des Heronverfahrens:

Beliebige Wahl des Feldindex 0 oder 1:

```
δ := | 0  if  ORIGIN = 0
     | 1  otherwise
```

Algorithmus zur Bestimmung der Wurzel der Zahlen zwischen a_1 und a_2:

```
Wurzel(ε, a_1, a_2) := | k ← δ
                       | for  n ∈ a_1 .. a_2
                       |   | X_k ← n
                       |   | Y_k ← Heron(n, ε)
                       |   | k ← k + 1
                       | erweitern(X, Y)
```

Gegeben: $\varepsilon := 10^{-10}$ $a_1 := 2$ $a_2 := 50$

Auswertung:

$\mathbf{Wurzel}(\varepsilon, a_1, a_2) =$

2	1.4142135624
3	1.7320508076
4	2
5	2.2360679775
6	2.4494897428
7	2.6457513111
8	2.8284271247
9	3
10	3.1622776602
11	3.3166247904
12	3.4641016151
13	3.6055512755
14	3.7416573868
15	3.8729833462
16	4
17	4.1231056256
18	4.2426406871
19	4.3588989435
20	4.472135955
21	4.582575695
22	4.6904157598
23	4.7958315233
24	4.8989794856
25	5
26	5.0990195136
27	5.1961524227
28	5.2915026221
29	5.3851648071
30	5.4772255751
31	5.5677643628
32	5.6568542495
33	5.7445626465
34	5.8309518948
35	5.9160797831
36	6
37	6.0827625303
38	...

usw.