Potenzfunktionen - Aufgaben mit Lösung

- Anwendungsaufgaben

made with mathcad

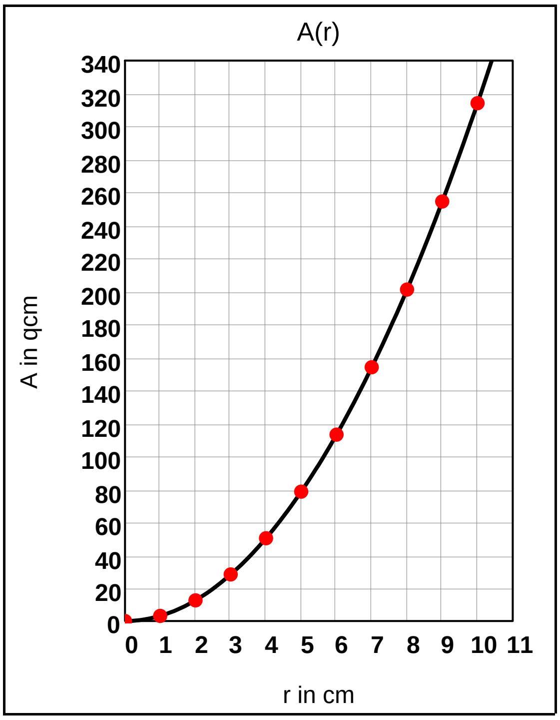
Definition des Feldindex in Vektoren und Matrizen: **ORIGIN** := **1**

Aufgabe 1

Gegeben ist die Maßzahl des Flächeninhalts A eines Kreises in Abhängigkeit vom Radius r.
Stellen Sie diese Abhängigkeit graphisch dar für $0 \cdot cm < r < 10 \cdot cm$.

Funktionsterm: $A_K(r) := \pi \cdot r^2$

Definitionsmenge: $r_D := 0, 0.1 \cdot cm .. 11 \cdot cm$ $\quad r_0 := 0, 1 \cdot cm .. 10 \cdot cm$



$r_0 =$ $\cdot cm$

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

$A_K(r_0) =$ $\cdot cm^2$

0
3.1
12.6
28.3
50.3
78.5
113.1
153.9
201.1
254.5
314.2

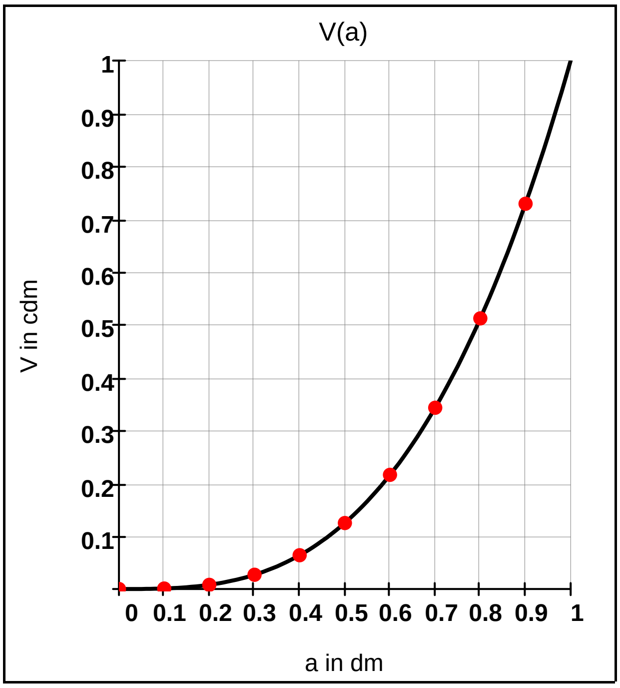
Aufgabe 2

Gegeben ist die Maßzahl des Volumens V eines Würfels in Abhängigkeit von der Kantenlänge a. Stellen Sie diese Abhängigkeit graphisch dar für $0 \cdot dm < a < 1 \cdot dm$.

Definition Dezimeter: $dm := 10 \cdot cm$

Funktionsterm: $V_W(a) := a^3$

Definitionsmenge: $a_D := 0, 0.01 \cdot dm .. 1 \cdot dm$ $a_0 := 0, 0.1 \cdot dm .. 1 \cdot dm$



$a_0 =$ ($\cdot dm$)

0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

$V_W(a_0) =$ ($\cdot dm^3$)

0
0
0.01
0.03
0.06
0.13
0.22
0.34
0.51
0.73
1

Aufgabe 3
Für ein abgeschlossenes Gas gilt bei konstantem Druck das Gesetz von Gay-Lussac:
1. Form: Das Volumen V ist ***direkt proportional*** zur absoluten Temperatur T:

$V \sim T \quad \Leftrightarrow \quad V = k \cdot T$ mit einer Konstanten k.

2. Form: Der Quotient aus Druck und Temperatur ist konstant:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \ldots = \frac{V}{T} = \text{konstant}$$

Eine Luftmenge hat bei 0°C das Volumen 200 cm³.
a) Stellen Sie die Zunahme des Volumens in Abhängigkeit von der absoluten Temperatur T in einem Diagramm dar für $0 < T \leq 350 \cdot K$
b) Wie groß ist das Volumen bei 50°C, wenn sich der Druck nicht ändert?

Teilaufgabe a)

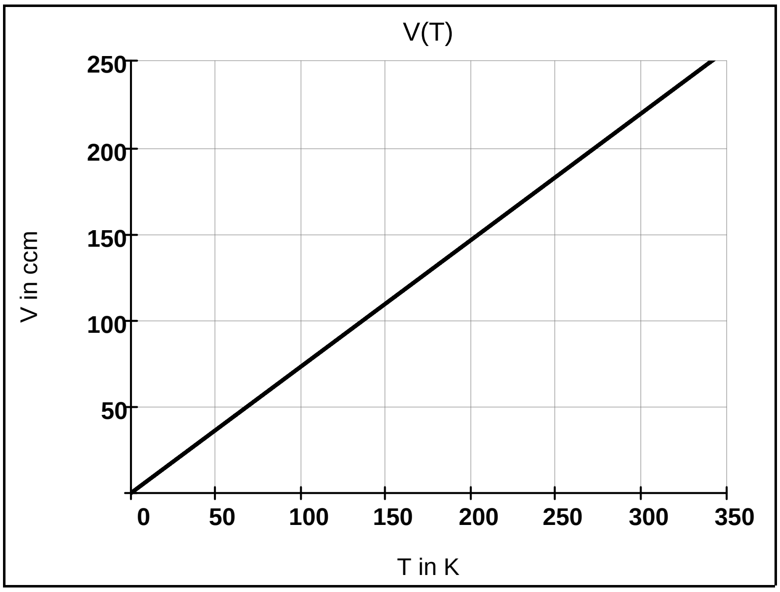
Gegeben: $\Theta_1 = 0\,°C \qquad \Theta_2 := 50\,°C \qquad V_1 := 200 \cdot cm^3$

Umrechnung in Kelvin: $T := 273.15 \cdot K + 50K = 323.15\,K$

Mathcad macht es direkt: $T_1 := 0\,°C = 273.15\,K \qquad T_2 := 50\,°C = 323.15\,K$

Proportionalitätsfaktor: $k := \frac{V_1}{T_1} \qquad k := \frac{200 \cdot cm^3}{273.15 \cdot K} \qquad k = 0.732 \cdot \frac{cm^3}{K}$

Funktionsterm: $V_G(T) := k \cdot T$ Definitionsmenge: $T := 0, 0.1 \cdot K .. 350 \cdot K$



Teilaufgabe b)

$V_G(T_2) = 236.61 \cdot cm^3$

Aufgabe 4

Für ein abgeschlossenes Gas gilt bei konstanter Temperatur das Gesetz von Boyle und Mariotte:
1. Form: Der Druck p ist ***umgekehrt proportional*** zum Volumen V:

$$p \sim \frac{1}{V} \quad \Leftrightarrow \quad p = k \cdot \frac{1}{V} \quad \text{mit einer Konstanten k.}$$

2. Form: Das Produkt aus Druck und Volumen ist konstant:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 = \ldots = p \cdot V = \text{konstant}$$

Eine abgeschlossene Gasmenge besitzt das Volumen $2.0 \cdot L$ (Liter) bei einem absoluten Druck von $150\ kPa$ (Kilopascal). Das Volumen wird unter Beibehaltung der Temperatur auf $1.0 \cdot L$ reduziert.
a) Stellen Sie die Zunahme des Drucks in einem Diagramm dar mit $0 < V \le 5 \cdot L$.
b) Auf welchen Wert ist der höchste Druck angestiegen?

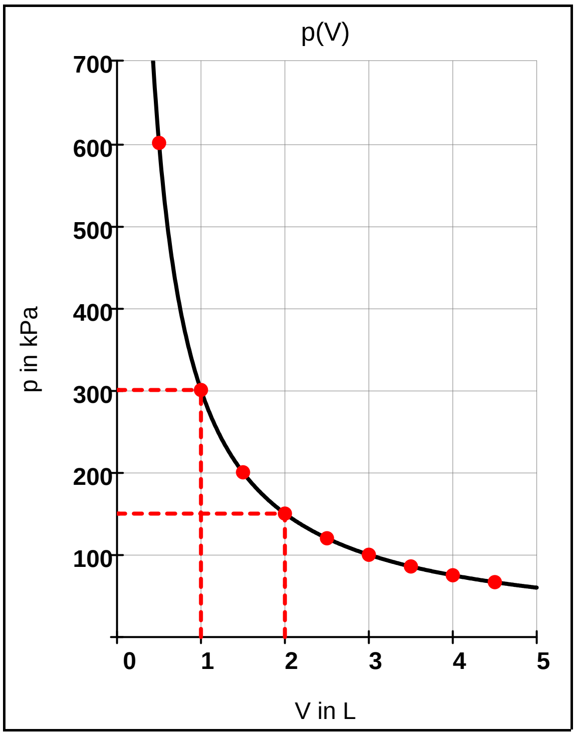
Teilaufgabe a)

Gegeben: $p_1 := 150 \cdot kPa$ $\quad V_1 := 2.0 \cdot L$ $\quad V_1 = 2 \times 10^3 \cdot cm^3$ $\quad V_2 := 1 \cdot L$

Konstante: $k := p_1 \cdot V_1$ $\quad k := 150 \cdot kPa \cdot 2 \cdot L$ $\quad k = 300 \cdot kPa \cdot L$

Funktionsterm: $p(V) := k \cdot \frac{1}{V}$

Definitionsmenge: $V_D := 0, 0.01 \cdot L .. 5 \cdot L$ $\quad V_0 := 0.5 \cdot L, 1 \cdot L .. 5 \cdot L$



$\frac{V_0}{L} =$	$\frac{p(V_0)}{kPa} =$
0.5	600
1	300
1.5	200
2	150
2.5	120
3	100
3.5	86
4	75
4.5	67
5	60

Teilaufgabe b)

$p(V_2) = 300 \cdot kPa$

Aufgabe 5

Für die Gravitationsfeldstärke der Erde gilt folgendes Abstandsgesetz: $g_{Grav}(r) = G \cdot \frac{M}{r^2}$

Gravitationskonstante: $G := 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$; Erdmasse: $M := 5.9736 \cdot 10^{24} \cdot kg$

Mittlerer Radius der Erde: $r_E := 6371 \cdot km$

a) Stellen Sie die Abnahme der Gravitationsfeldstärke in einem Diagramm dar mit $r_E < r \le 6 \cdot r_E$.

b) Berechnen Sie die Gravitationsfeldstärke auf der Erdoberfläche $r_1 = r_E$

und im Abstand $r_2 = 2 \cdot r_E$.

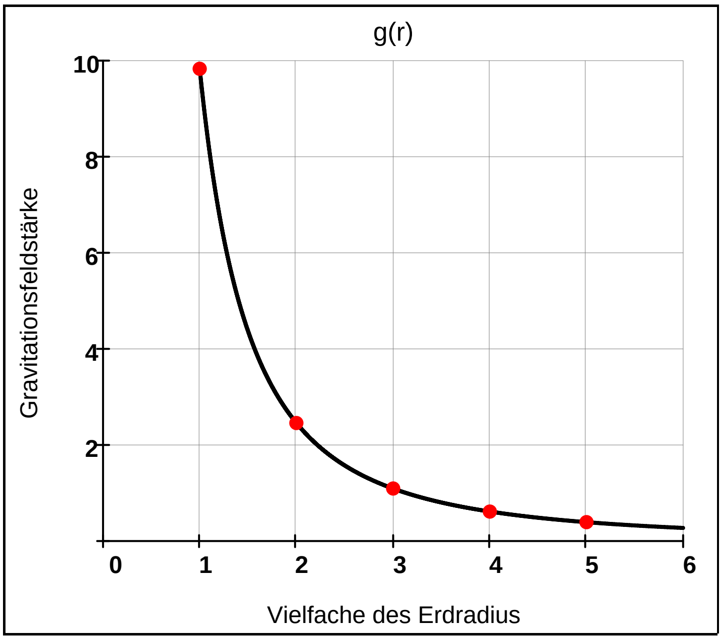
Teilaufgabe a)

$g_{Grav}(r) := G \cdot \frac{M}{r^2}$ $\qquad g_{Grav}(r)$ **Gleitkommazahl, 3** $\rightarrow \frac{3.99e14 \cdot m^3}{r^2 \cdot s^2}$

Zehnerpotenzschreibweise: $g_{Grav}(r) := 3.99 \cdot 10^{14} \cdot \frac{m^3}{s^2} \cdot \frac{1}{r^2}$

Definitionsmengen: Durchgezogene Linie: $r := r_E, r_E + 100 \cdot m .. 6 \cdot r_E$

Einzelne Punkte: $r0 := r_E, 2 \cdot r_E .. 5 \cdot r_E$



$\frac{r0}{r_E} =$	$\frac{g_{Grav}(r0)}{m \cdot s^{-2}} =$
1	9.83
2	2.458
3	1.092
4	0.614
5	0.393

Teilaufgabe b)

$g_{Grav}(r_E) = 9.83 \frac{m}{s^2}$

$g_{Grav}(2 \cdot r_E) = 2.458 \frac{m}{s^2}$

Verhältnis: $\frac{g_{Grav}(r_E)}{g_{Grav}(2 \cdot r_E)} = 4$

Aufgabe 6

Im homogenen elektrischen Feld eines quadratischen, mit Luft gefüllten Plattenkondensators der Fläche $A_0 := 10 \cdot cm^2$ gilt für die Kapazität C folgendes Abstandsgesetz: $C_{allg}(d) = \varepsilon_0 \cdot \frac{A_0}{d}$

a) Stellen Sie die Abnahme der Kapazität in einem Diagramm dar mit $0.1 \cdot cm \le d \le 0.8 \cdot cm$.

b) Berechnen Sie die Kapazität C_1 für $d_1 := 0.8 \cdot cm$ und die Kapazität C_2 für $d_2 := 0.4 \cdot cm$.

Definiert in Mathcad: $\varepsilon_0 = 8.854188 \times 10^{-12} \cdot \frac{A \cdot s}{V \cdot m}$ $\quad$ $\varepsilon_0 := 8.854188 \times 10^{-12} \frac{A \cdot s}{V \cdot m}$

Für die Auswertung: $A_0 := 1.0 \cdot 10^{-3} \cdot m^2$

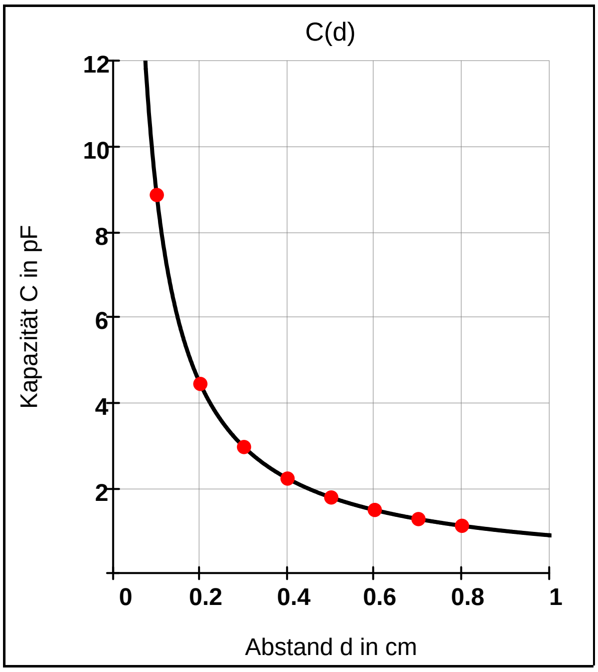
Teilaufgabe a)

$C_{allg}(d) := \varepsilon_0 \cdot \frac{A_0}{d}$ $\qquad$ $C_{allg}(d) = \frac{8.854188e\text{-}15 \cdot A \cdot m \cdot s}{V \cdot d}$

Zehnerpotenzschreibweise: $C_{allg}(d) := 8.8542 \cdot 10^{-15} \cdot F \cdot m \cdot \frac{1}{d}$

Definitionsmengen: Durchgezogene Linie: $d := 0, 0.001 \cdot cm .. 1.2 \cdot cm$

Einzelne Punkte: $d0 := 0.1 \cdot cm, 0.2 \cdot cm .. 0.8 \cdot cm$



$\frac{d0}{cm} =$	$\frac{C_{allg}(d0)}{pF} =$
0.1	8.854
0.2	4.427
0.3	2.951
0.4	2.214
0.5	1.771
0.6	1.476
0.7	1.265
0.8	1.107

Teilaufgabe b)

$C_{allg}(d_1) = 1.107 \cdot pF$

$C_{allg}(d_2) = 2.2136 \cdot pF$

Verhältnis: $\frac{C_{allg}(d_1)}{C_{allg}(d_2)} = 0.5$