

Ganzrationale Funktionen - Aufgaben 1

- Symmetrie und Nullstellen



Definition des Feldindex in Vektoren und Matrizen: **ORIGIN := 1**

Aufgabe 1

Untersuchen Sie folgende Funktionen f_i auf Symmetrie und Nullstellen. Geben Sie, wenn möglich, den vollständig faktorisierten Funktionsterm an.

$$a) f_1(x) := \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 21)$$

$$b) f_2(x) := \frac{1}{2} \cdot x^4 - 4 \cdot x^2$$

$$c) f_3(x) := \frac{1}{12} \cdot x^3 + \frac{1}{3} \cdot x$$

$$d) f_4(x) := \frac{1}{2} \cdot x^4 + \frac{1}{2} \cdot x^2 - 6$$

$$e) f_5(x) := \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot x^3 + x^2 - 20 \cdot x - 28)$$

$$f) f_6(x) := \frac{1}{5} \cdot (x^4 - 6 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 3)$$

$$g) f_7(x) := \frac{1}{16} \cdot (x^4 + 6 \cdot x^2 + 16)$$

$$h) f_8(x) := \frac{1}{20} \cdot (x^6 - 26 \cdot x^3 - 27)$$

Teilaufgabe a)

$$f_1(x) := \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 21)$$



Keine Symmetrie, da der Funktionsterm gerade und ungerade Exponenten von x hat.

$$\text{Nullstellenbedingung: } 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 21 = 0$$

$$\text{Erste Nullstelle erraten: } f_1(1) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x_1 := 1$$

Polynomdivision:

$$\frac{2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 21}{x - 1} \text{ parfrac} \rightarrow 2 \cdot x^2 - x - 21$$

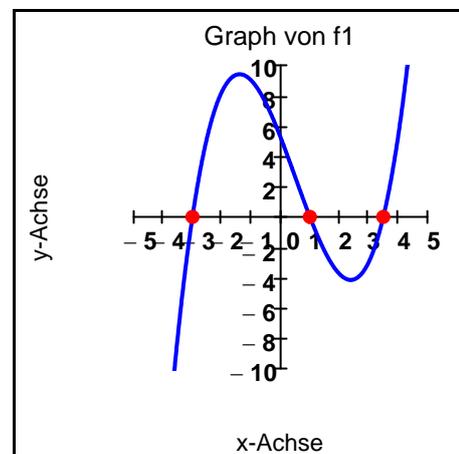
Lösung der quadratischen Gleichung:

$$2 \cdot x^2 - x - 21 = 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$(\Rightarrow) \quad x_2 := -3$$

$$(\Rightarrow) \quad x_3 := \frac{7}{2}$$

$$f_1(x) = \frac{1}{4} \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right)$$



Teilaufgabe b)

$$f_2(x) := \frac{1}{2} \cdot x^4 - 4 \cdot x^2$$



Achsensymmetrie, da der Funktionsterm nur gerade Exponenten von x hat.

Nullstellenbedingung: $\frac{1}{2} \cdot x^4 - 4 \cdot x^2 = 0$

Ausklammern: $\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot (x^2 - 8) = 0$

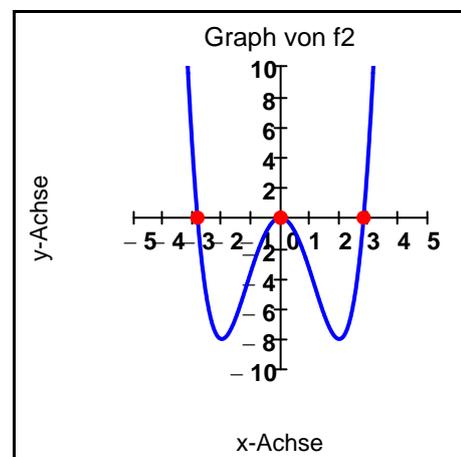
Lösung mithilfe der Produktformel:

$$x^2 = 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_{12} = 0$$

$$x^2 - 8 = 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot \sqrt{2} \\ -2 \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(\Rightarrow) \quad x_3 := 2 \cdot \sqrt{2} \quad x_4 := -2 \cdot \sqrt{2}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot (x + 2 \cdot \sqrt{2}) \cdot (x - 2 \cdot \sqrt{2})$$



Teilaufgabe c)

$$f_3(x) := \frac{1}{12} \cdot x^3 + \frac{1}{3} \cdot x$$



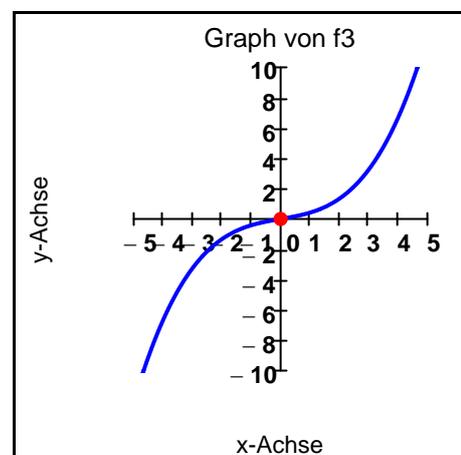
Punktsymmetrie, da der Funktionsterm nur ungerade Exponenten von x hat.

Nullstellenbedingung: $\frac{1}{12} \cdot x^3 + \frac{1}{3} \cdot x = 0$

Ausklammern: $\frac{1}{12} \cdot x \cdot (x^2 + 4) = 0$

Lösung: $x_1 := 0$

$$f_3(x) = \frac{1}{12} \cdot x \cdot (x^2 + 4)$$



Teilaufgabe d)

$$f_4(x) := \frac{1}{2} \cdot x^4 + \frac{1}{2} \cdot x^2 - 6$$



Achsensymmetrie, da der Funktionsterm nur gerade Exponenten von x hat.

Nullstellenbedingung: $\frac{1}{2} \cdot x^4 + \frac{1}{2} \cdot x^2 - 6 = 0$

Substitution: $x^2 = t \quad (\Rightarrow) \quad \frac{1}{2} \cdot t^2 + \frac{1}{2} \cdot t - 6 = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$\frac{1}{2} \cdot t^2 + \frac{1}{2} \cdot t - 6 = 0 \text{ auflösen, } t \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

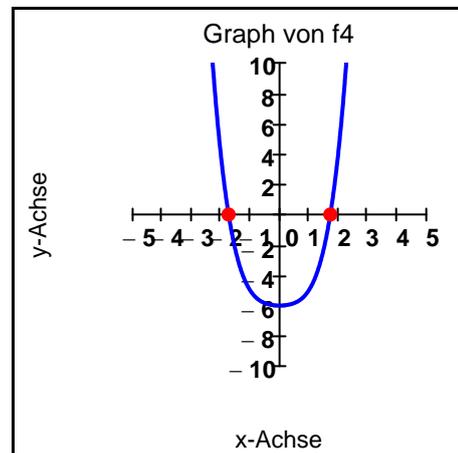
Resubstitution:

$$x^2 = -4 \quad (\Rightarrow) \quad \text{keine Lösung}$$

$$x^2 = 3 \quad (\Rightarrow) \quad x_1 := -\sqrt{3}$$

$$(\Rightarrow) \quad x_2 := \sqrt{3}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{2} \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3}) \cdot (x^2 + 4)$$



Teilaufgabe e)

$$f_5(x) := \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot x^3 + x^2 - 20 \cdot x - 28)$$



Keine Symmetrie, da der Funktionsterm gerade und ungerade Exponenten von x hat.

Nullstellenbedingung: $2 \cdot x^3 + x^2 - 20 \cdot x - 28 = 0$

Erste Nullstelle erraten: $f_5(-2) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x_1 := -2$

Polynomdivision:

$$\frac{2 \cdot x^3 + x^2 - 20 \cdot x - 28}{x + 2} \text{ parfrac} \rightarrow 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 14$$

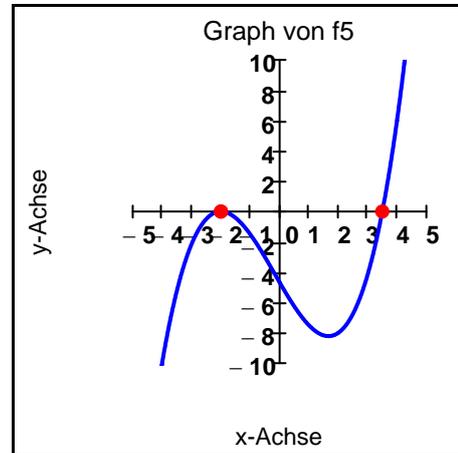
Lösung der quadratischen Gleichung:

$$2 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 14 = 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$(\Rightarrow) \quad x_2 := -2$$

$$(\Rightarrow) \quad x_3 := \frac{7}{2}$$

$$f_5(x) = \frac{1}{6} \cdot (x + 2)^2 \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right)$$



Teilaufgabe f)

$$f_6(x) := \frac{1}{5} \cdot (x^4 - 6 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 3)$$



Keine Symmetrie, da der Funktionsterm gerade und ungerade Exponenten von x hat.

Nullstellenbedingung: $x^4 - 6 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 3 = 0$

Erste Nullstelle erraten: $f_6(1) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x_1 := 1$

Polynomdivision:

$$\frac{x^4 - 6 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 3}{x - 1} \text{ parfrac} \rightarrow x^3 + x^2 - 5 \cdot x + 3$$

$$p_6(x) := x^3 + x^2 - 5 \cdot x + 3$$

Nullstellenbedingung: $x^3 + x^2 - 5 \cdot x + 3 = 0$

Zweite Nullstelle erraten: $p_6(1) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x_2 := 1$

Polynomdivision:

$$\frac{x^3 + x^2 - 5 \cdot x + 3}{x - 1} \text{ parfrac} \rightarrow x^2 + 2 \cdot x - 3$$

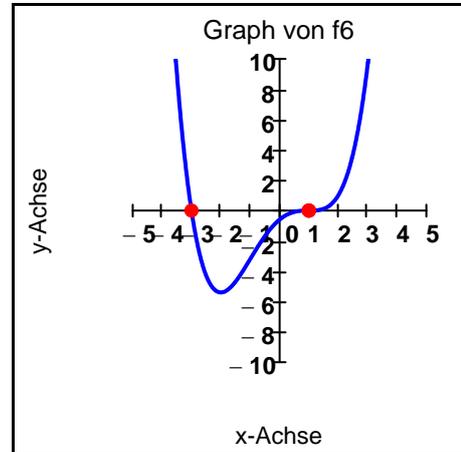
Lösung der quadratischen Gleichung:

$$x^2 + 2 \cdot x - 3 = 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(\Rightarrow) \quad x_3 := 1$$

$$(\Rightarrow) \quad x_4 := -3$$

$$f_6(x) = \frac{1}{5} \cdot (x - 1)^3 \cdot (x + 3)$$



Teilaufgabe g)

$$f_7(x) := \frac{1}{16} \cdot (x^4 + 6 \cdot x^2 + 16)$$



Achsensymmetrie, da der Funktionsterm nur gerade Exponenten von x hat.

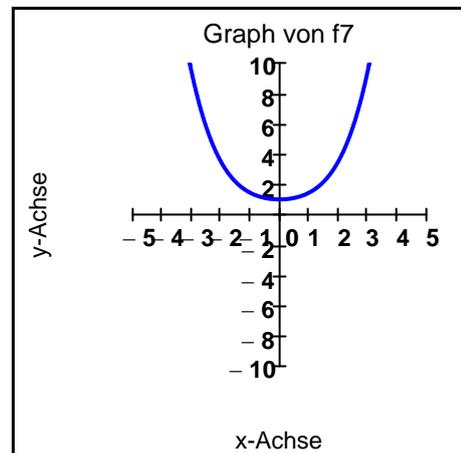
$$\text{Nullstellenbedingung: } x^4 + 6 \cdot x^2 + 16 = 0$$

$$\text{Substitution: } x^2 = t \quad (\Rightarrow) \quad t^2 + 6 \cdot t + 16 = 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$t^2 + 6 \cdot t + 16 = 0 \text{ auflösen, } t \rightarrow \begin{pmatrix} -3 + \sqrt{7} \cdot i \\ -3 - \sqrt{7} \cdot i \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{keine} \\ \text{reelle} \\ \text{Lösung} \end{array}$$

keine Zerlegung möglich



Teilaufgabe h)

$$f_8(x) := \frac{1}{20} \cdot (x^6 - 26 \cdot x^3 - 27)$$



Keine Symmetrie, da der Funktionsterm gerade und ungerade Exponenten von x hat.

Nullstellenbedingung: $x^6 - 26 \cdot x^3 - 27 = 0$

Substitution: $x^3 = t \quad (\Rightarrow) \quad t^2 - 26 \cdot t - 27 = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$t^2 - 26 \cdot t - 27 = 0 \text{ auflösen, } t \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Resubstitution:

$$x^3 = -1 \quad (\Rightarrow) \quad x_1 := -1$$

$$x^3 = 27 \quad (\Rightarrow) \quad x_2 := 27$$

Teilweise faktorisiert:

$$f_8(x) = -(x^3 + 1) \cdot (x^3 - 27)$$

weiteres Faktorisieren mithilfe der Formeln

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - a \cdot b + b^2) \quad \text{und} \quad a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2)$$

$$(\Rightarrow) \quad x^3 + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) \quad (1)$$

$$(\Rightarrow) \quad x^3 - 27 = (x - 3) \cdot (x^2 + 3 \cdot x + 9) \quad (2)$$

$$f_8(x) = \frac{1}{20} \cdot (x - 3) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) \cdot (x^2 + 3 \cdot x + 9)$$

Eine Zerlegung ginge jeweils auch mithilfe einer Polynomdivision:

$$\frac{x^3 + 1}{x + 1} \text{ parfrac } \rightarrow x^2 - x + 1 \quad \text{vgl. (1)}$$

$$\frac{x^3 - 27}{x - 3} \text{ parfrac } \rightarrow x^2 + 3 \cdot x + 9 \quad \text{vgl. (2)}$$

