Ganzrationale Funktionen - Aufgaben 2

- Steckbriefaufgaben

Definition des Feldindex in Vektoren und Matrizen: **ORIGIN** := 1

Aufgabe 1

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades geht durch die Punkte **A(−3 / −54)**, **B(1/ $\frac{10}{3}$)** und **C(4 / $-\frac{8}{3}$)**. Er schneidet an der Stelle $x_0 = 6$ die x-Achse.

Bestimmen Sie den Funktionsterm und untersuchen Sie die Funktion auf weitere Nullstellen.

$$f(x,a,b,c,d) := a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$$

Aufstellen des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} f(-3,a,b,c,d) = -54 \\ f(1,a,b,c,d) = \frac{10}{3} \\ f(4,a,b,c,d) = -\frac{8}{3} \\ f(6,a,b,c,d) = 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9\cdot b - 27\cdot a - 3\cdot c + d = -54 \\ a + b + c + d = \frac{10}{3} \\ 64\cdot a + 16\cdot b + 4\cdot c + d = -\frac{8}{3} \\ 216\cdot a + 36\cdot b + 6\cdot c + d = 0 \end{pmatrix} \text{auflösen}, a, b, c, d \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

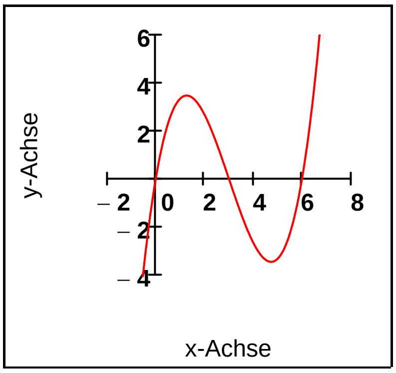
Abrufen der Lösungen:

$a_0 = \frac{1}{3}$ $\quad b_0 = -3$ $\quad c_0 = 6$ $\quad d_0 = 0$

$$f(x) := f(x, a_0, b_0, c_0, d_0) \qquad f(x) = \frac{x^3}{3} - 3\cdot x^2 + 6\cdot x$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3}{3} - 3\cdot x^2 + 6\cdot x = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$



Weitere Nullstellen: $x_2 := 0$ $\quad x_3 := 3$

Aufgabe 2

Für eine ganzrationale Funktion 4. Grades gilt: $f(-x) = f(x)$, $f(4) = 0$, $f(0) = 4$ und $f(2) = 4.5$

Bestimmen Sie den Funktionsterm und ermitteln Sie alle weiteren Nullstellen.

Achsensymmetrie: $f(x,a,b,c) := a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(4,a,b,c) = 0 \\ f(0,a,b,c) = 4 \\ f(2,a,b,c) = \frac{9}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 256 \cdot a + 16 \cdot b + c = 0 \\ c = 4 \\ 16 \cdot a + 4 \cdot b + c = \frac{9}{2} \end{pmatrix} \text{auflösen}, a, b, c \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{32} & \frac{1}{4} & 4 \end{pmatrix}$$

Abrufen der Lösungen:

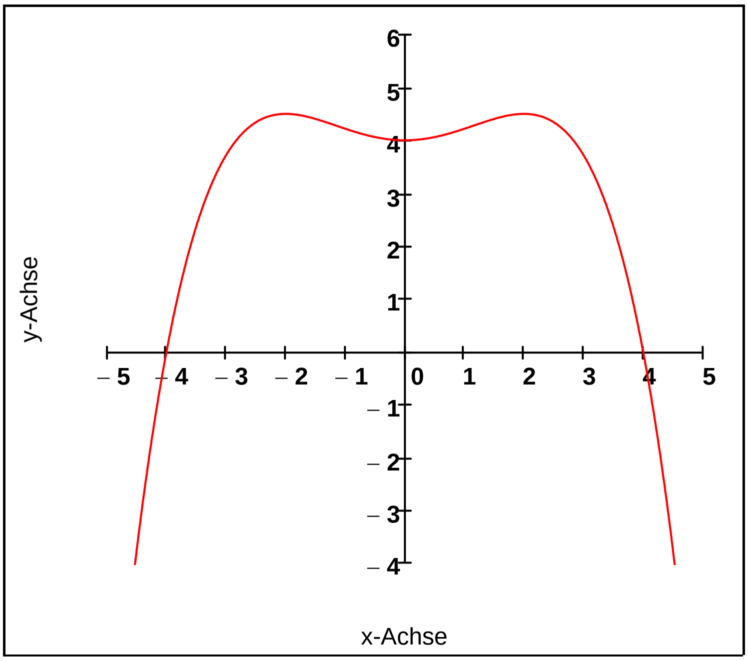
$$a_0 = -\frac{1}{32} \qquad b_0 = \frac{1}{4} \qquad c_0 = 4$$

$$f(x) := f(x, a_0, b_0, c_0) \qquad f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{32} + 4$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{32} + 4 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2i \cdot \sqrt{2} \\ -2i \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$x_1 := -4 \qquad x_2 := 4$$



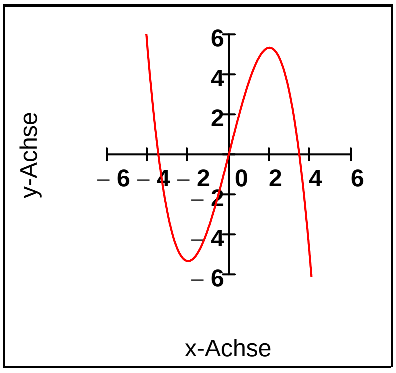
Aufgabe 3

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist zum Koordinatenursprung symmetrisch.
Die Punkte **A(3/3)** und **B($2\cdot\sqrt{3}$/0)** liegen auf dem Graphen.
Bestimmen Sie den Funktionsterm.

Punktsymmetrie: $f(x,a,b) := a\cdot x^3 + b\cdot x$

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(3,a,b) = 3 \\ f(2\cdot\sqrt{3},a,b) = 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 27\cdot a + 3\cdot b = 3 \\ 24\cdot\sqrt{3}\cdot a + 2\cdot\sqrt{3}\cdot b = 0 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, a, b \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 4 \end{pmatrix}$$

$f(x) := f(x, a_0, b_0)$ $\qquad f(x) = 4\cdot x - \frac{x^3}{3}$



Aufgabe 4

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades schneidet die x-Achse an der Stelle $x_1 := 2$ und berührt sie an der Stelle $x_1 := 4$. Der Schnittpunkt mit der y-Achse sei an der Stelle $y_0 = 8$.
Bestimmen Sie den Funktionsterm.

$f(x,a) := a\cdot(x-2)\cdot(x-4)^2$

$a_0 := f(0,a) = 8 \rightarrow -32\cdot a = 8 \text{ auflösen}, a \rightarrow -\frac{1}{4}$

$f(x) := f(x, a_0)$ $\qquad f(x) \text{ erweitern} \rightarrow \frac{5\cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{4} - 8\cdot x + 8$