Aufgaben zu Symmetrie und Nullstellen ganzrationaler Funktionen

Aufgabe

Untersuchen Sie folgende Funktionen f_i auf Symmetrie und Nullstellen.
Geben Sie, wenn möglich, den vollständig faktorisierten Funktionsterm an.

a) $f_1(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(2x^3 - 3x^2 - 20x + 21\right)$

b) $f_2(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4x^2$

c) $f_3(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{3}x$

d) $f_4(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 6$

e) $f_5(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(2x^3 + x^2 - 20x - 28\right)$

f) $f_6(x) = \frac{1}{5} \cdot \left(x^4 - 6x^2 + 8x - 3\right)$

g) $f_7(x) = \frac{1}{16} \cdot \left(x^4 + 6x^2 + 16\right)$

h) $f_8(x) = \frac{1}{20} \cdot \left(x^6 - 26x^3 - 27\right)$

Steckbriefaufgaben zu ganzrationalen Funktionen

Aufgabe 1

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades geht durch die Punkte $A(-3/-54)$, $B(1/\frac{10}{3})$ und $C(4/-\frac{8}{3})$. Er schneidet an der Stelle $x_0 = 6$ die x–Achse.
Bestimmen Sie den Funktionsterm und untersuchen Sie die Funktion auf weitere Nullstellen.
[Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 6x$]

Aufgabe 2

Für eine ganzrationale Funktion 4. Grades gilt: $f(x) = f(-x) \wedge f(4) = 0 \wedge f(0) = 4$ $\wedge f(2) = 4{,}5$.
Bestimmen Sie den Funktionsterm und ermitteln Sie alle weiteren Nullstellen.
[Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{4}x^2 + 4$]

Aufgabe 3

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist zum Koordinatenursprung symmetrisch. Die Punkte $A(3/3)$, $B(2\sqrt{3}/0)$ liegen auf dem Graphen.
Bestimmen Sie den Funktionsterm.
[Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$]

Aufgabe 4

Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion 3. Grades schneidet die x-Achse an der Stelle $x_1 = -2$ und berührt sie an der Stelle $x_1 = 4$. Der Schnittpunkt mit der y-Achse sei an der Stelle $y_0 = 8$. Bestimmen Sie den Funktionsterm.

Parameteraufgaben zu ganzrationalen Funktionen

Aufgabe 1

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(x^2 - k^2\right) \cdot \left(2x + 2k\right) \quad \wedge \quad k \in IR$

a) Zeigen Sie mit Hilfe einer geeigneten Umformung, dass der Funktionsterm in der Form $f_k(x) = \frac{2}{3} \cdot \left(x + k\right)^2 \cdot \left(x - k\right)$ geschrieben werden kann.

b) Ermitteln Sie Anzahl, Lage und Vielfachheit aller Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k und skizzieren Sie für jeden typischen Fall eine Scharkurve.

Aufgabe 2

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k(x) = \frac{1}{9} \cdot \left(x^4 - kx^2 - 9x^2 + 9k\right) \quad \wedge \quad k \geq 0 \quad \wedge \quad k \in IR$

a) Untersuchen Sie den Graphen von f_k in Bezug auf Symmetrie.

b) Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm $f_k(x)$ auch in der Form $f_k(x) = \frac{1}{9} \cdot \left(x^2 - k\right) \cdot \left(x^2 - 9\right)$ schreiben lässt, und ermitteln Sie Anzahl, Lage und Vielfachheit aller Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k.

c) Skizzieren Sie für jeden typischen Fall eine Scharkurve.

Aufgabe 3

Gegeben sind die Funktionen $f_a(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - ax + 3a$ mit $a \in IR \setminus \{0\}$ und $D_f = IR$.

a) Weisen Sie nach, dass sich der Funktionsterm $f_a(x)$ auch in der Form $f_a(x) = \frac{1}{9}\left(x - 3\right) \cdot \left(x^2 - 9a\right)$ schreiben lässt.

b) Bestimmen Sie Anzahl, Lage und Art der Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 4

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k(x) = -\frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{2}{3}kx^2 \quad \wedge \quad k \in IR$.

a) Ermitteln Sie Anzahl, Lage und Vielfachheit aller Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k. Führen Sie eine geeignete Fallunterscheidung durch und beschreiben Sie je weils den Verlauf des Graphen in der Umgebung dieser Nullstellen.

b) Bestimmen Sie den Parameter k so, dass G_{f_k} durch den Punkt (3/3) verläuft.

Aufgabe 5

Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = -\frac{1}{15} \cdot \left(x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{21}{2}x^2 - 29x - 30\right)$

a) Zeigen Sie, dass $x_1 = -1{,}5$ und $x_2 = 5$ die einzigen Nullstellen des Graphen von f sind.

b) Eine Parabel hat den Scheitel (0/5) und verläuft durch den Punkt $P(5/y_P)$ von G_f. Ermitteln Sie den Funktionsterm der Parabel.