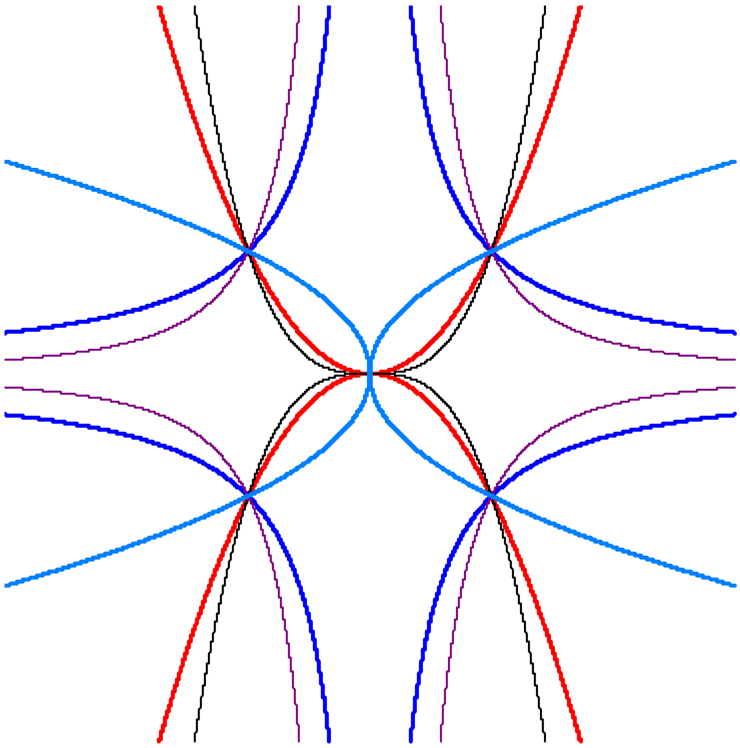
mathphys-online

Potenzfunktionen



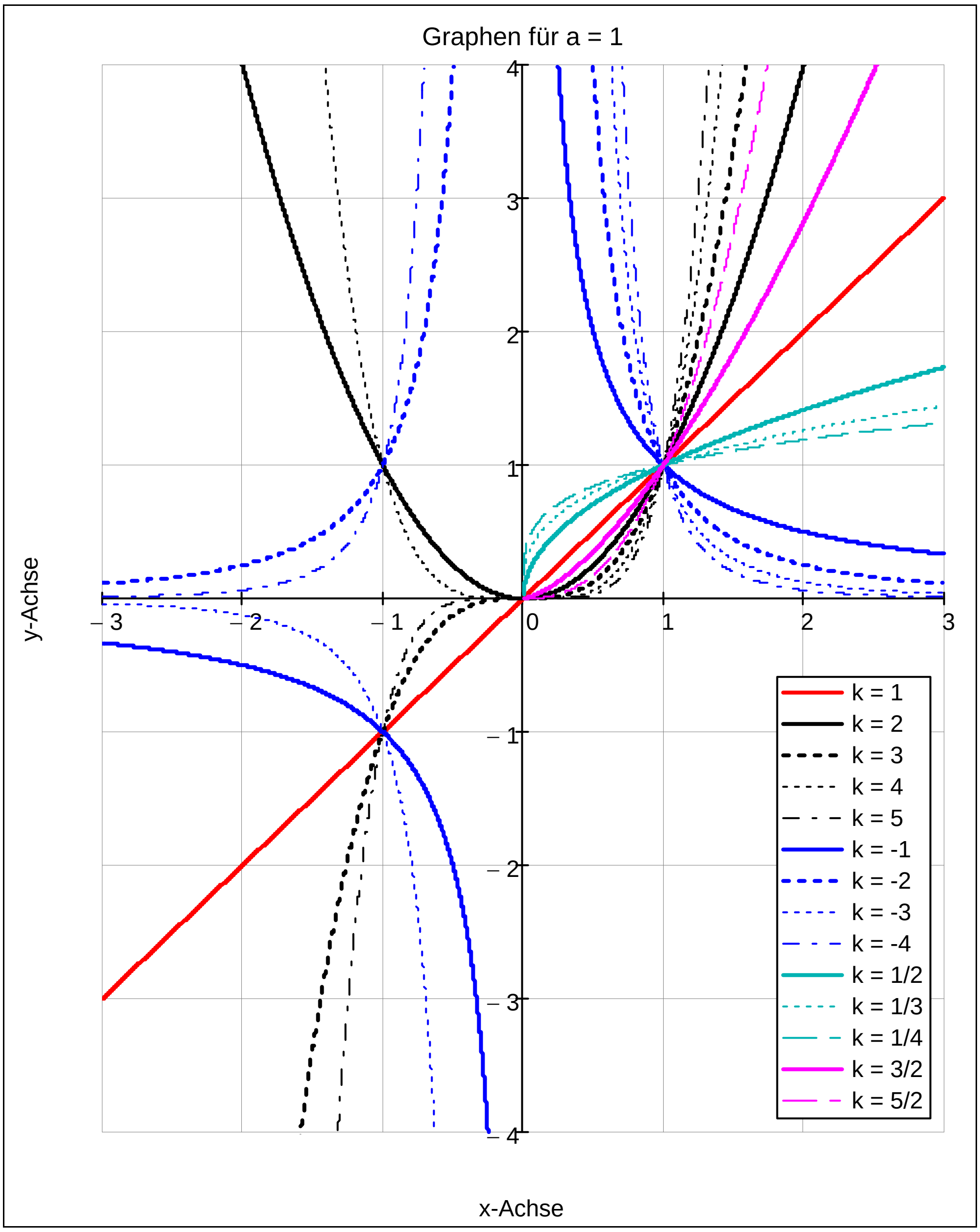
Inhaltsverzeichnis

Graphiken erstellt mit Mathcad 15

Potenzfunktionen

1. Definition

Eine Funktion f_k mit dem Funktionsterm $f_k(x) = a \cdot x^k$ mit $k \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \in D$ heißt ***Potenzfunktion***. Die Definitionsmenge D ist geeignet zu wählen.



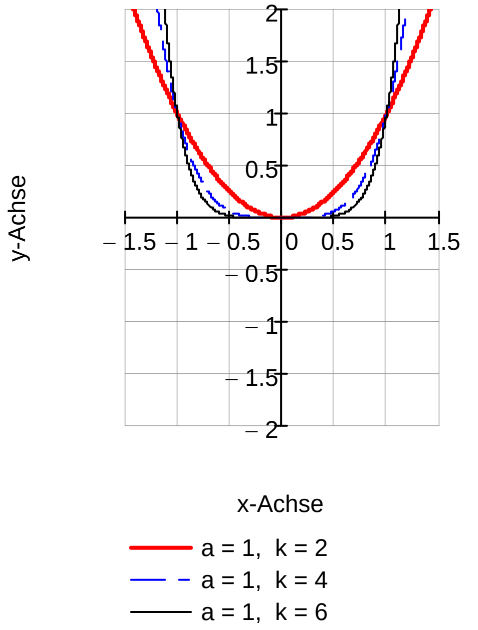
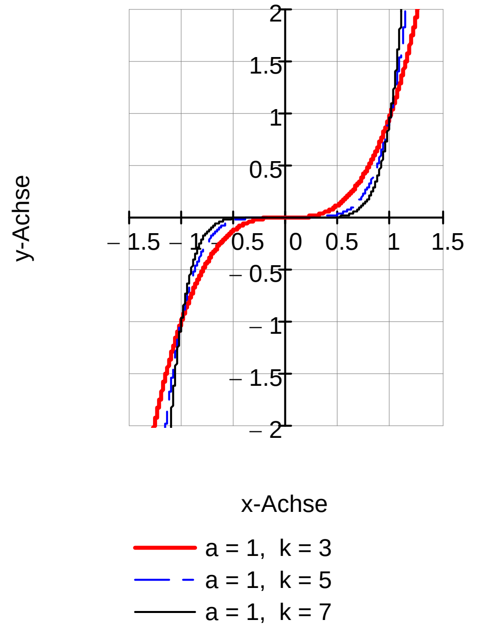
Um die Eigenschaften der Potenzfunktionen systematisch zu erfassen, werden im Folgenden ganzzahlige k>0 bzw. k<0 sowie $k = \pm\frac{n}{m}$ mit teilerfremden n und m getrennt betrachtet.

Dabei reicht die Beschränkung auf den Fall $|a| = 1$ aus, weil die Kurven gegenüber den von $y = x^k$ in Richtung der y-Achse
für $|a| > 1$ mit dem Faktor a gestreckt und für $|a| < 1$ mit dem Faktor a gestaucht werden.

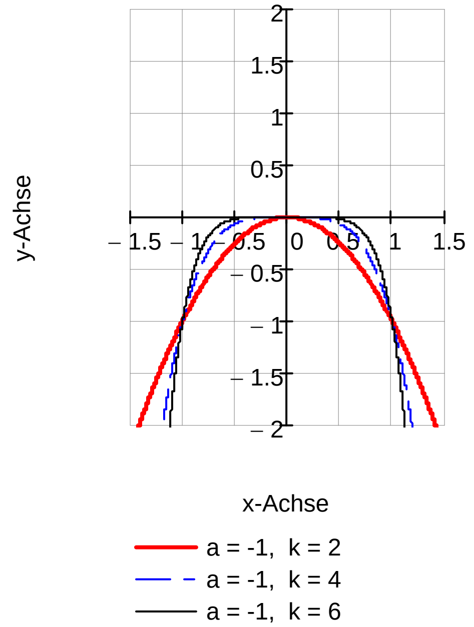
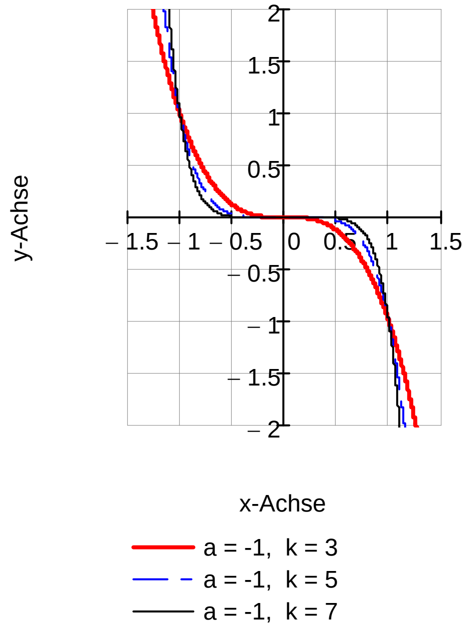
2. Parabeln $f_k(x) = a \cdot x^k \quad \wedge \quad k \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Definitionsmenge: ID = IR

2.1 Eigenschaften für a = 1

	Gerade Parabeln	**Ungerade Parabeln**
Graphen		
Gemeinsame Punkte	$(-1/1) \quad \wedge \quad (0/0) \quad \wedge \quad (1/1)$	$(-1/-1) \quad \wedge \quad (0/0) \quad \wedge \quad (1/1)$
Symmetrie	achsensymmetrisch zur y-Achse	punktsymmetrisch zum Ursprung
Monotonie	G_f streng monoton fallend für $x \in]-\infty\, ; 0]$ G_f streng monoton steigend für $x \in [0\, ; +\infty[$	G_f streng monoton steigend für $x \in IR$
Verhalten für $\lvert x \rvert \to \infty$	für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$ Limes-Scheibweise: $\lim_{x \to -\infty} f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$ Limes-Scheibweise: $\lim_{x \to +\infty} f(x) \to +\infty$	für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to -\infty$ Limes-Scheibweise: $\lim_{x \to -\infty} f(x) \to -\infty$ für $x \to +\infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$ Limes-Scheibweise: $\lim_{x \to +\infty} f(x) \to +\infty$

2.2 Eigenschaften für a = – 1

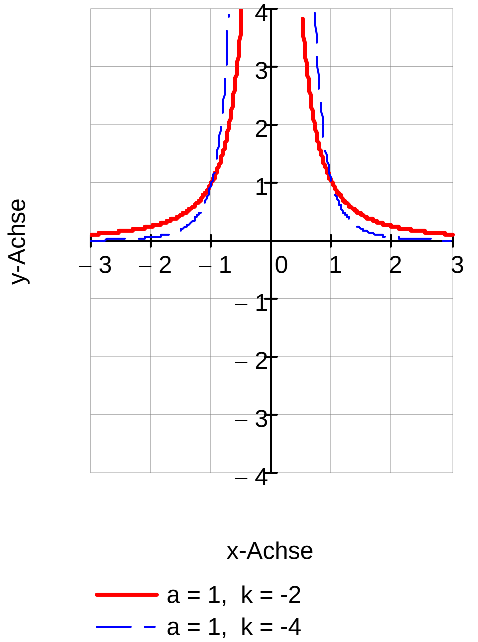
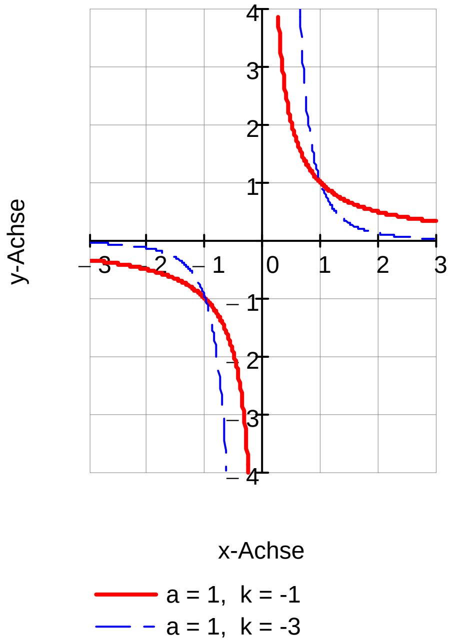
	Gerade Parabeln	**Ungerade Parabeln**
Graphen		
Gemeinsame Punkte	$(-1/-1) \quad \wedge \quad (0/0) \quad \wedge \quad (1/-1)$	$(-1/1) \quad \wedge \quad (0/0) \quad \wedge \quad (1/-1)$
Symmetrie	achsensymmetrisch zur y-Achse	punktsymmetrisch zum Ursprung
Monotonie	G_f streng monoton steigend für $x \in]-\infty\,;0]$ G_f streng monoton fallend für $x \in [0\,;+\infty[$	G_f streng monoton fallend für $x \in IR$
Verhalten für $\|x\| \to \infty$	für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to -\infty$ Limes-Scheibweise: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \to -\infty$ für $x \to +\infty$ gilt: $f(x) \to -\infty$ Limes-Scheibweise: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \to -\infty$	für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$ Limes-Scheibweise: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$ gilt: $f(x) \to -\infty$ Limes-Schreibweise $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \to -\infty$

3. Hyperbeln

$$f_k(x) = a \cdot x^k \wedge k \in \{-1, -2, -3, -4, -5, -6\} \quad \Leftrightarrow \quad f_n(x) = a \cdot \frac{1}{x^n} \wedge n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Definitionsmenge: ID = IR \ {0}

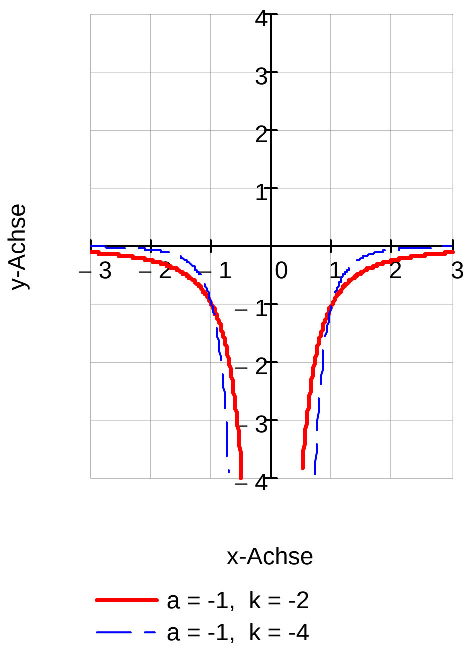
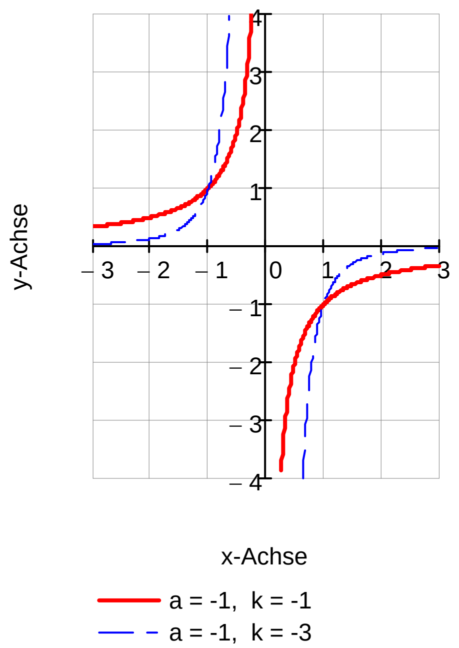
3.1 Eigenschaften für a = 1

	Gerade Hyperbeln	**Ungerade Hyperbeln**
Graphen		
Gemeinsame Punkte	$(-1/1) \quad \wedge \quad (1/1)$	$(-1/-1) \quad \wedge \quad (1/1)$
Symmetrie	achsensymmetrisch zur y-Achse	punktsymmetrisch zum Ursprung
Monotonie	G_f streng monoton steigend für $x \in]-\infty\,;0[$ G_f streng monoton fallend für $x \in]0\,;+\infty[$	G_f streng monoton fallend für $x \in]-\infty\,;0[$ G_f streng monoton fallend für $x \in]0\,;+\infty[$
Verhalten für $\lvert x \rvert \to \infty$	für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 0^+$ Limes-Schreibweise: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \to 0^+$ für $x \to +\infty$ gilt: $f(x) \to 0^+$ Limes-Schreibweise: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \to 0^+$	für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 0^-$ Limes-Schreibweise: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \to 0^-$ für $x \to +\infty$ gilt: $f(x) \to 0^+$ Limes-Schreibweise: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \to 0^+$
Asymptoten	Waagerechte (horizontale) Asymptote y = 0 (x-Achse) Senkrechte (vertikale) Asymptote x = 0 (y-Achse)	

<u>Bezeichnung</u>

Eine ***Asymptote*** ist eine Gerade, an die sich eine Kurve anschmiegt, ohne sie zu berühren.

3.2 Eigenschaften für a = – 1

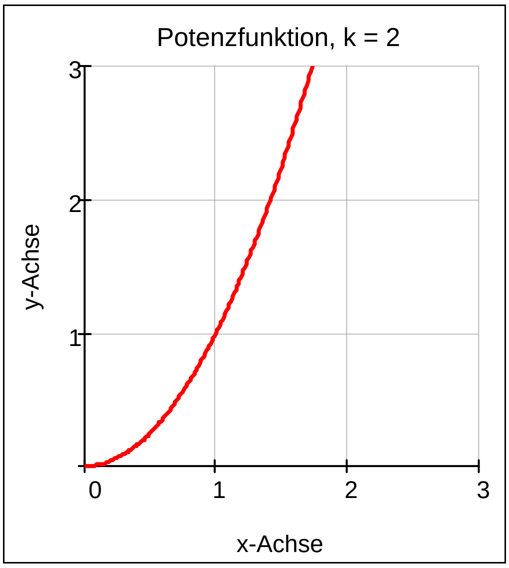
	Gerade Hyperbeln	**Ungerade Hyperbeln**
Graphen		
Gemeinsame Punkte	$(-1/-1) \quad \wedge \quad (1/-1)$	$(-1/1) \quad \wedge \quad (1/-1)$
Symmetrie	achsensymmetrisch zur y-Achse	punktsymmetrisch zum Ursprung
Monotonie	G_f streng monoton fallend für $x \in]-\infty\,;0[$ G_f streng monoton steigend für $x \in]0\,;+\infty[$	G_f streng monoton steigend für $x \in]-\infty\,;0[$ G_f streng monoton steigend für $x \in]0\,;+\infty[$
Verhalten für $\lvert x \rvert \to \infty$	für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 0^-$ Limes-Schreibweise: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to 0^-$ für $x \to +\infty$ gilt: $f(x) \to 0^-$ Limes-Schreibweise: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \to 0^-$	für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 0^+$ Limes-Schreibweise: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to 0^+$ für $x \to +\infty$ gilt: $f(x) \to 0^-$ Limes-Schreibweise: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \to 0^-$
Asymptoten	Waagrechte (horizontale) Asymptote y = 0 (x-Achse) Senkrechte (vertikale) Asymptote x = 0 (y-Achse)	

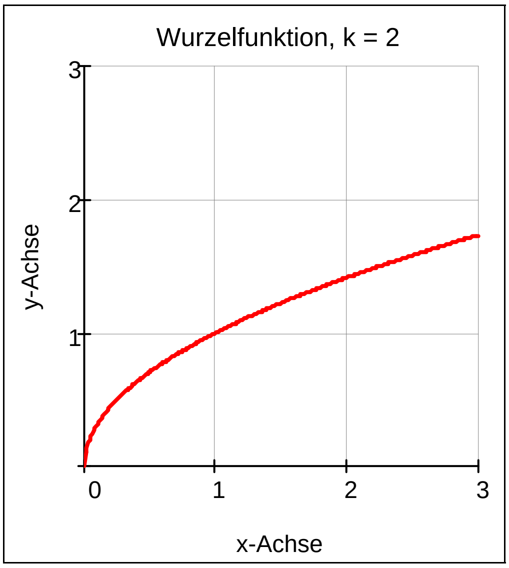
4. Wurzelfunktionen

Definition 1
Die Umkehrfunktionen der auf dem Intervall $x \geq 0$ beschränkten Potenzfunktionen vom Typ $y = x^k$ mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ heißen ***Wurzelfunktionen*** und sind in der Form $y = \sqrt[k]{x}$ mit $x \geq 0$ darstellbar.

Potenzfunktion: $f_k(x) = x^k \wedge$ k gerade

Umkehrfunktion: $u_k(x) = \sqrt[k]{x} \wedge$ k gerade

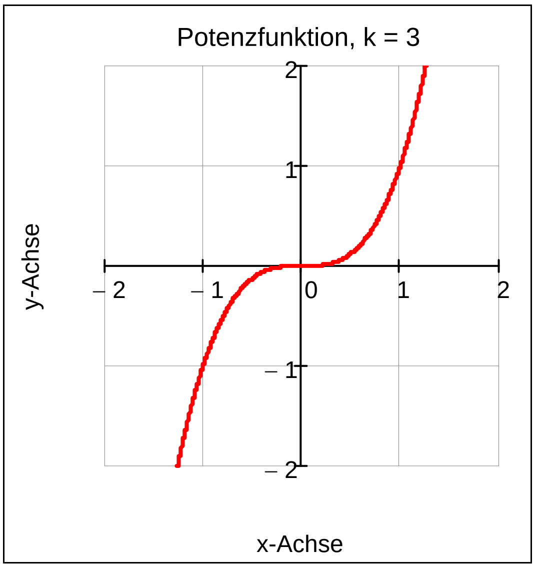


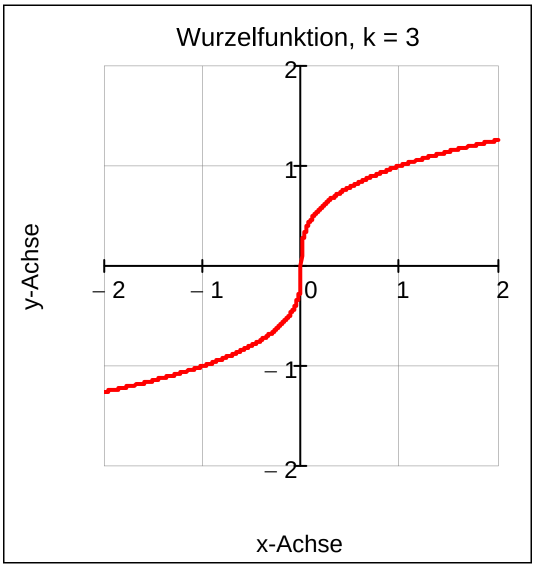


Die kubische Parabel $y = x^3$ verläuft in ihrem Definitionsbereich $-\infty < x < +\infty$ streng monoton wachsend, ist dort also umkehrbar. Die Wurzelfunktion $y = \sqrt[3]{x}$ ist **definitionsgemäß** die Umkehrfunktion der auf den **1. Quadranten beschränkte** Parabel.
Die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion für x < 0 lautet: $y = -\sqrt[3]{-x}$.

Potenzfunktion: $f_k(x) = x^k \wedge$ k ungerade

Umkehrfunktion: $u_k(x) = \begin{cases} \sqrt[k]{x} & \text{für} \quad x \geq 0 \\ -\sqrt[k]{-x} & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$



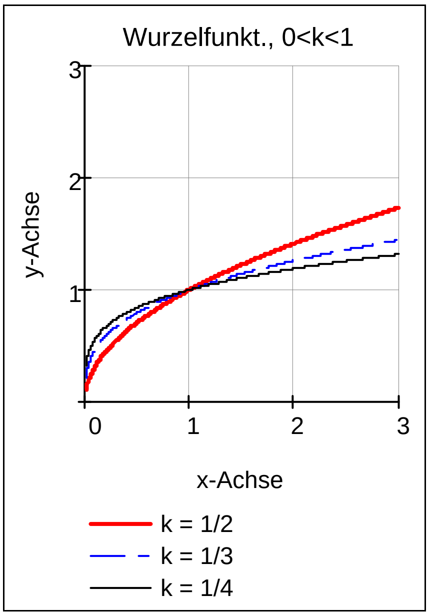


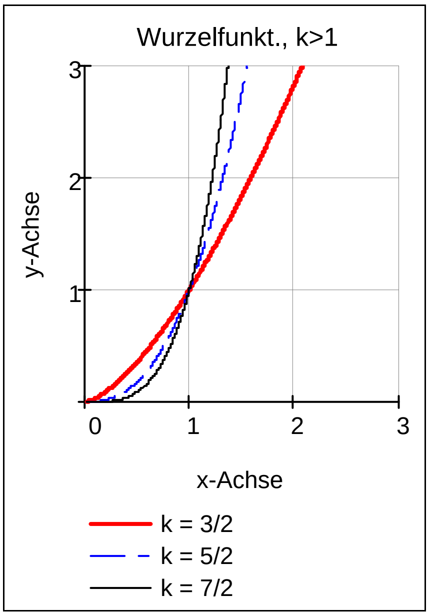
Definition 2

Eine Potenzfunktion mit ***rationalen*** Exponenten $k = \pm\frac{m}{n}$, wobei n, m ganzzahlig, positiv und teilerfremd sind, ist folgendermaßen definiert: $f(x) = x^{\pm\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \quad \wedge \quad x > 0$

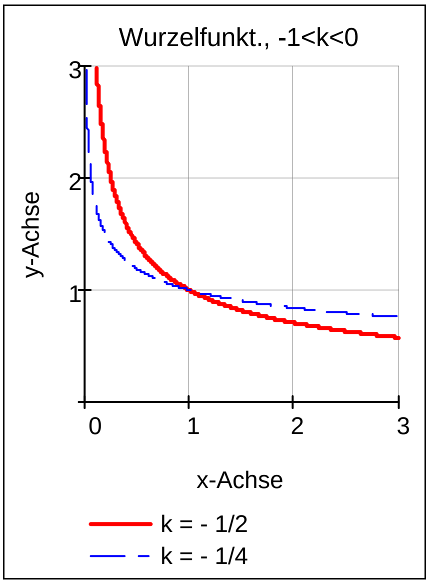
Man bezeichnet die Potenzfunktion $y = x^{\pm\frac{m}{n}}$ auch als die n-te Wurzel aus der Potenz x^m.

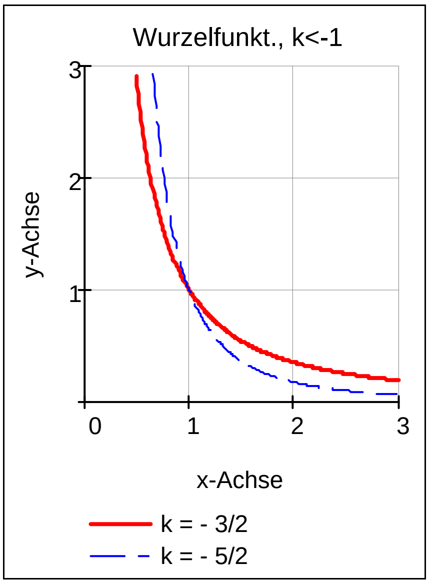
k > 0: Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$





k < 0: Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$





Vorzeichenuntersuchung für die erste und zweite Ableitung

Funktionsterm: $f_k(x) = x^k$ mit $x > 0$

Erste Ableitung: $f_k\,'(x) = k \cdot x^{k-1} = \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad k > 0 \\ < 0 & \text{für} \quad k < 0 \end{cases}$

Zweite Ableitung: $f_k\,''(x) = k \cdot (k-1) \cdot x^{k-2} = \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad k < 0 \vee k > 1 \\ < 0 & \text{für} \quad 0 < k < 1 \end{cases}$

Funktionswert: $f_k(1) = 1^k = 1$

Folgerungen

- Alle Graphen der Potenzfunktionen gehen durch den Punkt (1/1).

- Die Graphen der Wurzelfunktionen mit k>0 sind streng monoton steigend.
- Die Graphen der Wurzelfunktionen mit 0<k<1 sind rechtsgekrümmt.
- Die Graphen der Wurzelfunktionen mit k>1 sind linksgekrümmt.

- Die Graphen der Wurzelfunktionen mit k<0 sind streng monoton fallend.
- Die Graphen der Wurzelfunktionen mit k<0 sind linksgekrümmt.

Bemerkungen

- Der Begriff der Potenzfunktionen lässt sich auch auf reelle Exponenten r ausdehnen.

  Es gilt: $\mathbf{y = x^r = e^{\ln(x^r)} = e^{r \cdot \ln(x)}}$

  Deshalb gilt für die Definitionsmenge der allgemeinen Potenzfunktion: $\mathbf{x \in IR^+}$

- Es gibt auch Potenzfunktionen mit irrationalen Exponenten
  (z. B. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, π, e, ...).

Potenzfunktionen mit reellen Exponenten werden im Rahmen der Schulmathematik nicht behandelt.