Ganzrationale Funktionen - Aufgaben 3

- Aufgaben mit Parameter

Definition des Feldindex in Vektoren und Matrizen: $\mathbf{ORIGIN} := 1$

Aufgabe 1

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k(x) = \frac{1}{3}\cdot\left(x^2 - k^2\right)\cdot(2\cdot x + 2\cdot k)$ mit $D_{fk} = \mathrm{IR} \wedge k \in \mathrm{IR}$.

a) Zeigen Sie mithilfe einer geeigneten Umformung, dass der Funktionsterm in der Form

$f_k(x) = \frac{2}{3}\cdot(x+k)^2\cdot(x-k)$ geschrieben werden kann.

b) Ermitteln Sie die Anzahl, Lage und Vielfachheit aller Nullstellen der Funktionen f_k in Abhängigkeit von k und skizzieren Sie für jeden typischen Fall eine Scharkurve.

Teilaufgabe a)

Anwenden der 3. bin. Formel und Ausklammern: $f_k(x) = \frac{1}{3}\cdot(x+k)\cdot(x-k)\cdot 2\cdot(x+k)$

Zusammenfassen der Terme: $f_k(x) = \frac{2}{3}\cdot(x+k)^2\cdot(x-k)$

Teilaufgabe b)

Funktionsterm: $f(x,k) := \frac{2}{3}\cdot(x+k)^2\cdot(x-k)$

Nullstellen: $(x+k)\cdot(x-k)^2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} k \\ k \\ -k \end{pmatrix}$

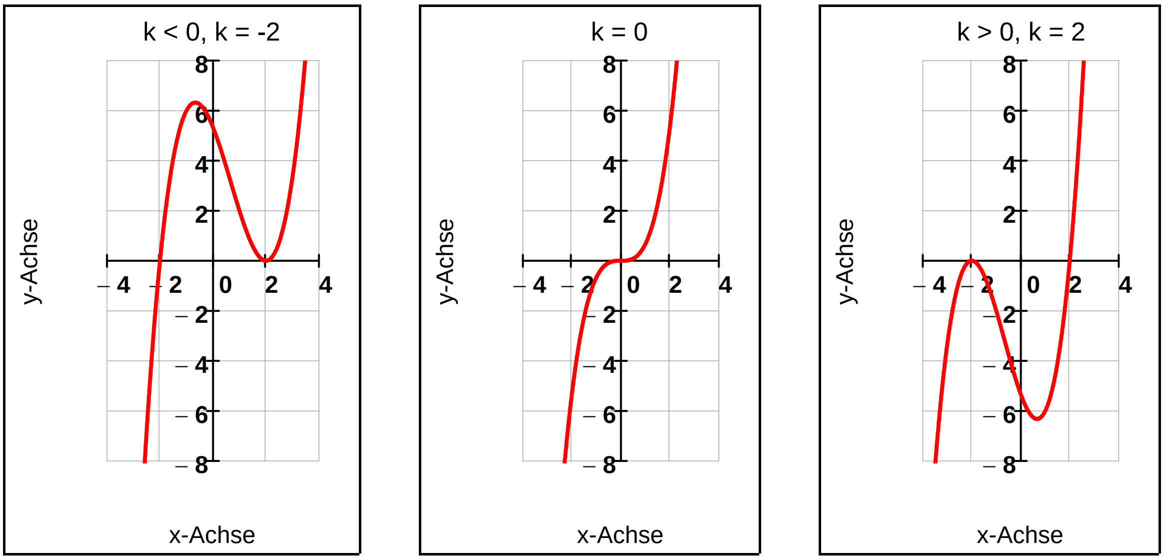
<u>1. Fall:</u> $k \neq 0$

$x_1 = -k$ einfache Nullstelle

$x_2 = k$ zweifache Nullstelle

<u>2. Fall:</u> $k = 0$

$x_0 = 0$ dreifache Nullstelle



Aufgabe 2

Gegeben sind die reellen Funktionen $\mathbf{f(x,k)} := \frac{1}{9}\cdot\left(x^4 - k\cdot x^2 - 9\cdot x^2 + 9\cdot k\right)$ mit $\mathbf{D_{fk} = IR} \wedge \mathbf{k \geq 0}$ und $\mathbf{k} \in \mathbf{IR}$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f_k in Bezug auf Symmetrie.

b) Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm $\mathbf{f_k(x)}$ auch in der Form $\mathbf{f_k(x)} = \frac{1}{9}\cdot\left(x^2 - k\right)\cdot\left(x^2 - 9\right)$ schreiben lässt, und ermitteln Sie Anzahl, Lage und Vielfachheit aller Nullstellen der Funktion $\mathbf{f_k}$ in Abhängigkeit von k.

c) Skizzieren Sie für jeden typischen Fall eine Scharkurve.

Teilaufgabe a)

Achsensymmetrie: $\mathbf{f(-x) = f(x)}$ $\quad(\Leftrightarrow)\quad$ $\mathbf{f(-x) - f(x) = 0}$

Punktsymmetrie: $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$ $\quad(\Leftrightarrow)\quad$ $\mathbf{f(-x) + f(x) = 0}$

$$\mathbf{f(-x,k)} = k - \frac{k\cdot x^2}{9} - x^2 + \frac{x^4}{9}$$

$\Rightarrow$ **achsensymmetrisch, da $\mathbf{f(-x,k) - f(x,k) \rightarrow 0}$**

Teilaufgabe b)

Faktorisierter Term: $\quad \mathbf{f(x,k)} := \frac{1}{9}\cdot\left(x^2 - k\right)\cdot\left(x^2 - 9\right)$

Ausmultiplizieren des Terms $\quad \frac{1}{9}\cdot\left(x^2 - k\right)\cdot\left(x^2 - 9\right)$ $\quad$ erweitert auf $\quad \frac{1}{9}\cdot x^4 - \frac{1}{9}\cdot k\cdot x^2 - x^2 + k$

und Ausklammern: $\quad \frac{1}{9}\cdot x^4 - \frac{1}{9}\cdot k\cdot x^2 - x^2 + k = \frac{1}{9}\cdot\left(x^4 - k\cdot x^2 - 9x^2 + 9\cdot k\right)$

Vollständiges Faktorisieren: $f(x,k) := \frac{1}{9}\cdot\left(x+\sqrt{k}\right)\cdot\left(x-\sqrt{k}\right)\cdot(x+3)\cdot(x-3)$

<u>1. Fall:</u> $k = 0$

$$f(x,0) = \frac{x^2\cdot(x-3)\cdot(x+3)}{9}$$

$x_1 = -3$ einfache Nullstelle

$x_2 = 3$ einfache Nullstelle

$x_3 = 0$ zweifache Nullstelle

<u>2. Fall:</u> $k = 9$

$$f(x,9) = \frac{(x-3)^2\cdot(x+3)^2}{9}$$

$x_1 = -3$ zweifache Nullstelle

$x_2 = 3$ zweifache Nullstelle

<u>3. Fall:</u> $k > 0 \wedge k \neq 9$

$$f(x,k) := \frac{1}{9}\cdot\left(x+\sqrt{k}\right)\cdot\left(x-\sqrt{k}\right)\cdot(x+3)\cdot(x-3)$$

$x_1 = -3$ einfache Nullstelle

$x_2 = 3$ einfache Nullstelle

$x_3 = -\sqrt{k}$ einfache Nullstelle

$x_2 = \sqrt{k}$ einfache Nullstelle

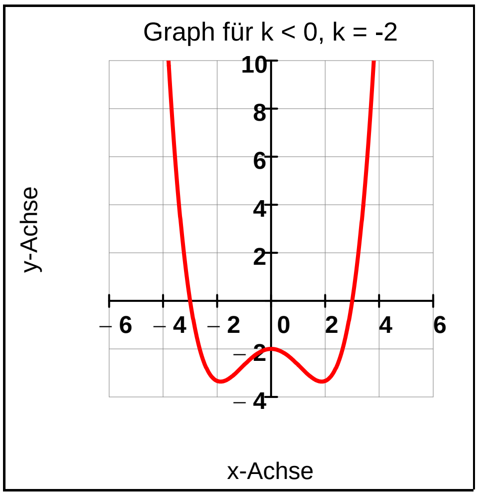
<u>4. Fall:</u> $k < 0$

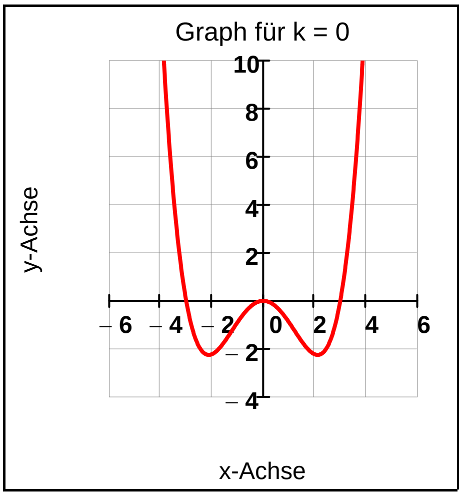
$$f(x,k) := \frac{1}{9}\cdot\left(x^2-k\right)\cdot(x+3)\cdot(x-3)$$

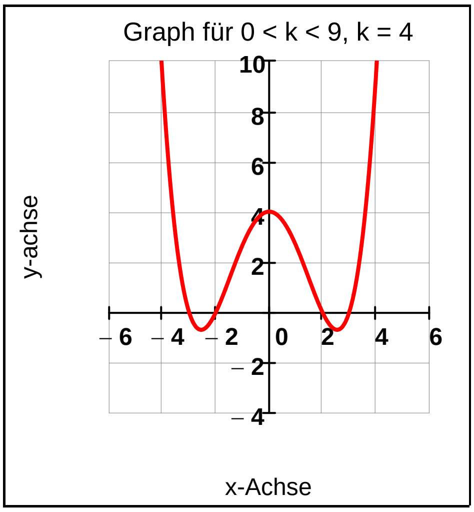
$x_1 = -3$ einfache Nullstelle

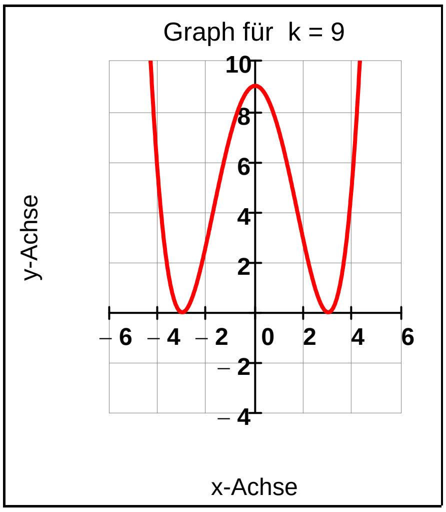
$x_2 = 3$ einfache Nullstelle

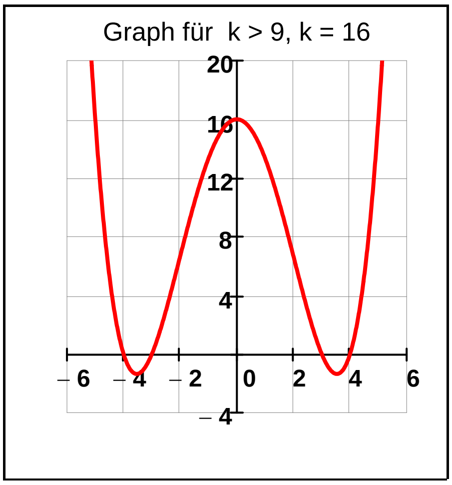
Teilaufgabe c)











Aufgabe 3

Gegeben sind die Funktionen $f_a(x) = \frac{1}{9} \cdot x^3 - \frac{1}{3} \cdot x^2 - a \cdot x + 3 \cdot a$ mit $D_{f_a} = IR$ und $a \in IR$.

a) Weisen Sie nach, dass sich der Funktionsterm $f_a(x) = \frac{1}{9} \cdot (x-3) \cdot \left(x^2 - 9 \cdot a\right)$ schreiben lässt.

b) Bestimmen Sie Anzahl, Lage und Art der Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

Teilaufgabe a)

Ausmultiplizieren: $f(x,a) := \frac{1}{9} \cdot (x-3) \cdot \left(x^2 - 9 \cdot a\right) = \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{3} - a \cdot x + 3 \cdot a$

Funktionsterm: $f(x,a) := \frac{1}{9} \cdot x^3 - \frac{1}{3} \cdot x^2 - a \cdot x + 3 \cdot a$

Teilaufgabe b)

Nullstellenbedingung: $\frac{1}{9} \cdot (x-3) \cdot \left(x^2 - 9 \cdot a\right) = 0$

$x - 3 = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow 3$

$x^2 - 9 \cdot a = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \cdot \sqrt{a} \\ -3 \cdot \sqrt{a} \end{pmatrix}$

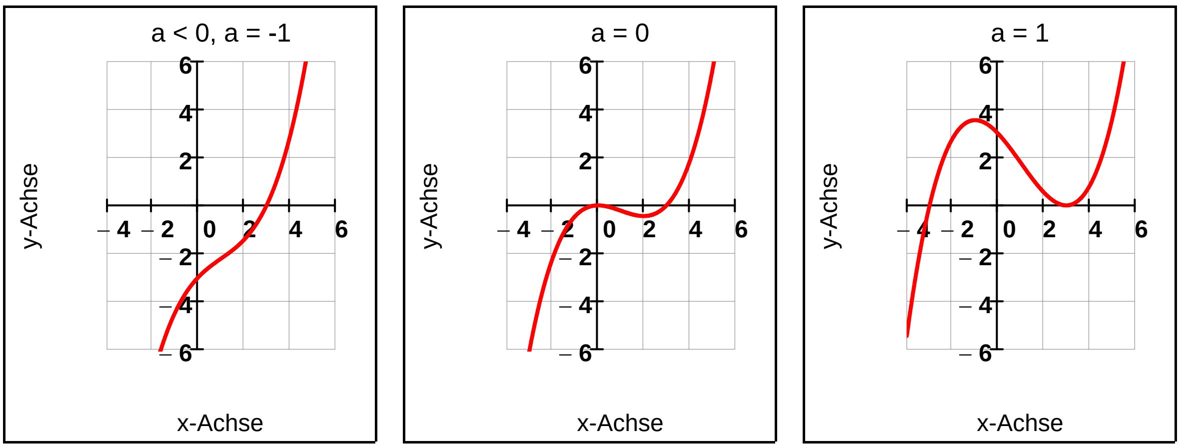
Sonderfall mit übereinstimmenden Nullstellen: $3 \cdot \sqrt{a} = 3$ $(\Leftrightarrow)$ $a = 1$

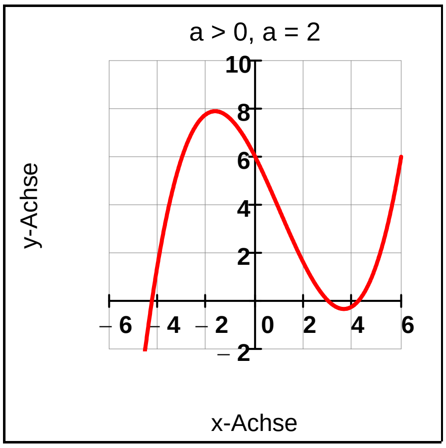
1. Fall: $a > 0 \wedge a \neq 1$ drei einfache Nullstellen: $x_1 = 3$ $x_2 = -3 \cdot \sqrt{a}$ $x_3 = 3 \cdot \sqrt{a}$

2. Fall: $a = 1$ einfache Nullstelle: $x_1 = -3$ zweifache Nullstelle: $x_2 = 3$

2. Fall: $a = 0$ einfache Nullstelle: $x_1 = 3$ zweifache Nullstelle: $x_2 = 0$

3. Fall: $a < 0$ einfache Nullstelle: $x_1 = 3$




a > 0, a = 2
10
8
6
4
2
− 2
− 6
− 4
− 2
0
2
4
6
y-Achse
x-Achse

Aufgabe 4

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k(x) = -\frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{2}{3}\cdot k\cdot x^2$ mit $k \in IR$.

a) Ermitteln Sie Anzahl, Lage und Vielfachheit aller Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k. Führen Sie eine geeignete Fallunterscheidung durch und beschreiben Sie jeweils den Verlauf des Graphen in der Umgebung dieser Nullstellen.

b) Bestimmen Sie den Parameter k so, dass der Graph G_{fk} durch den Punkt **P(3/3)** verläuft.

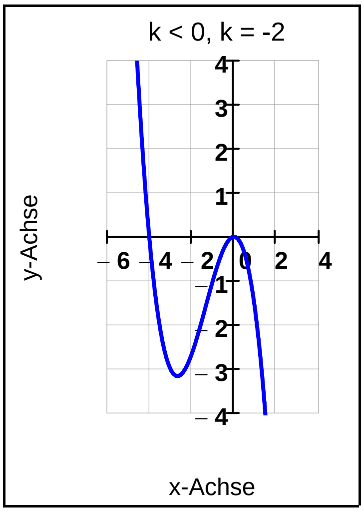
Teilaufgabe a)

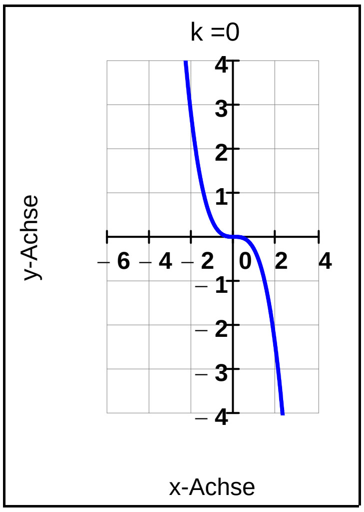
Funktionsterm: $f(x,k) := \frac{-1}{3}\cdot x^3 + \frac{2}{3}\cdot k\cdot x^2$

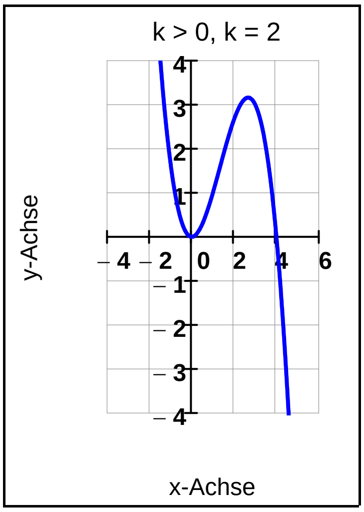
Nullstellenbedingung: $-\frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{2}{3}\cdot k\cdot x^2 = 0$

Ausklammern: $\frac{-1}{3}\cdot x^2\cdot(x - 2\cdot k) = 0$

<u>1. Fall:</u> $k = 0$	$x_1 = 0$	dreifache Nullstelle
<u>2. Fall:</u> $k \neq 0$	$x_1 = 0$	zweifache Nullstelle
	$x_2 = 2\cdot k$	einfache Nullstelle







Teilaufgabe b)

Punkt P einsetzen: $k_0 := f(3,k) = 3 \to 6\cdot k - 9 = 3$ auflösen, $k \to 2$

Konkreter Funktionsterm: $f(x,k_0) = \frac{4\cdot x^2}{3} - \frac{x^3}{3}$

Aufgabe 5

Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = -\frac{1}{15}\cdot\left(x^4 - \frac{3}{2}\cdot x^3 - \frac{21}{2}\cdot x^2 - 29\cdot x - 30\right)$ mit $k \in IR$.

a) Zeigen Sie, dass $x_1 = -1.5$ und $x_2 = 5$ die einzigen Nullstellen des Graphen von f sind.

b) Eine Parabel hat den Scheitel (0/5) und verläuft durch den Punkt $P(5/y_P)$ des Graphen G_f.

Ermitteln Sie den Funktionsterm der Parabel.

Teilaufgabe a)

Funktionsterm: $f(x) := -\frac{1}{15}\cdot\left(x^4 - \frac{3}{2}\cdot x^3 - \frac{21}{2}\cdot x^2 - 29\cdot x - 30\right)$

Nullstellenbedingung: $x^4 - \frac{3}{2}\cdot x^3 - \frac{21}{2}\cdot x^2 - 29\cdot x - 30 = 0$

1. Polynomdivision: $\frac{x^4 - \frac{3}{2}\cdot x^3 - \frac{21}{2}\cdot x^2 - 29\cdot x - 30}{x-5}$ parfrac $\rightarrow 7\cdot x + \frac{7\cdot x^2}{2} + x^3 + 6$

Nullstellenbedingung: $x^3 + \frac{7}{2}\cdot x^2 + 7\cdot x + 6 = 0$

2. Polynomdivision: $\frac{x^3 + \frac{7}{2}\cdot x^2 + 7\cdot x + 6}{x + \frac{3}{2}}$ parfrac $\rightarrow x^2 + 2\cdot x + 4$

Nullstellenbedingung: $x^2 + 2\cdot x + 4 = 0$ auflösen, x $\rightarrow \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{3}\cdot i \\ -1 - \sqrt{3}\cdot i \end{pmatrix}$ keine reelle Lösung

$\Rightarrow$ keine weiteren Nullstellen $\Leftrightarrow$ $x_1 = -1.5$ und $x_2 = 5$ sind die einzigen Nullstellen

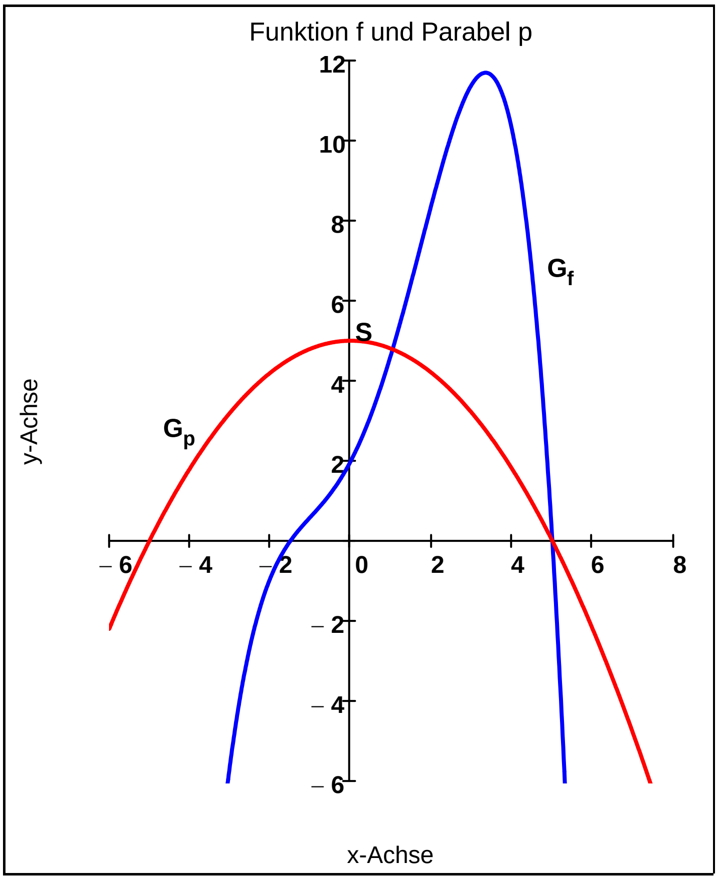
Teilaufgabe b)

Parabel in Scheitelform: $p(x, a) := a\cdot x^2 + 5$

P ist die Nullstelle von f: $y_P := f(5) \rightarrow 0$

Punkt $P(5/y_P)$ $\in$ G_f: $a_1 := p(5, a) = 0 \rightarrow 25\cdot a + 5 = 0$ auflösen, a $\rightarrow -\frac{1}{5}$

Konkrete Parabel: $p(x, a_1) = 5 - \frac{x^2}{5}$


Funktion f und Parabel p
y-Achse
x-Achse
G_f
G_p
S
12
10
8
6
4
2
– 2
– 4
– 6
– 6
– 4
– 2
0
2
4
6
8