# Aufgaben zur Differentialrechnung - Lösung

- Tangentenaufgaben

Definition des Feldindex in Vektoren und Matrizen: $\mathbf{ORIGIN} := 1$

## Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = -x^2 + 2 \cdot x$, wobei $x \in \mathrm{IR}$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an $G_f$ im Punkt $P(2/y_P) \in G_f$.

b) Zeichnen Sie den Graphen von f und die Tangente in einem kart. Koordinatensystem.

Gegeben: $f(x) := -x^2 + 2 \cdot x$ $\quad x_P := 2$

**Teilaufgabe a)**

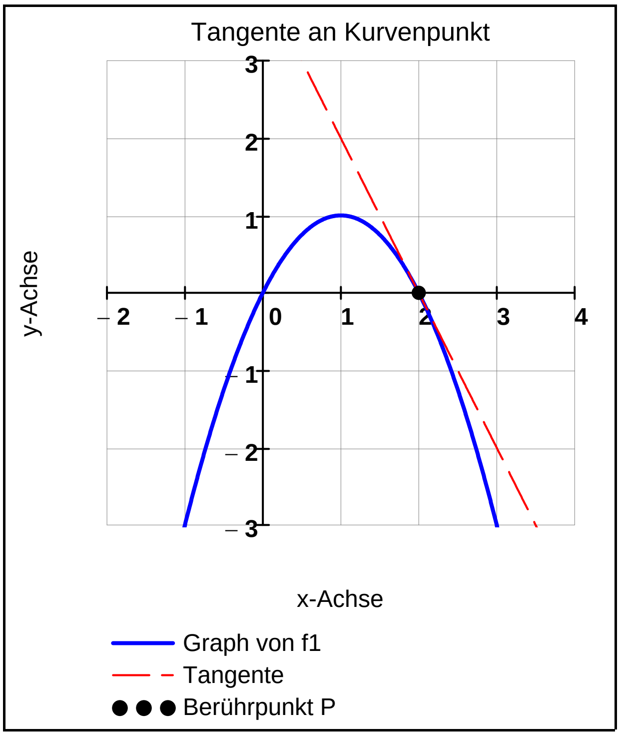
Funktionswert: $y_P := f(x_P)$ $\quad y_P = 0$ $\quad$ Kurvenpunkt: $P := (x_P \;\; y_P)$ $\quad P \rightarrow (2 \;\; 0)$

1. Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx} f(x)$ $\quad f'(x) = 2 - 2 \cdot x$

Tangentengleichung: $t(x) := f'(x_P) \cdot (x - x_P) + f(x_P)$

$t(x) = 4 - 2 \cdot x$

**Teilaufgabe b)**



## Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm $\mathbf{f(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2}$, wobei $\mathbf{x} \in \mathbf{IR}$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an $G_f$ durch den Punkt $\mathbf{Q(x_Q/y_Q)} \notin \mathbf{G_f}$.

b) Geben Sie die Berührpunkte an.

c) Zeichnen Sie den Graphen von f und die Tangenten in einem kart. Koordinatensystem.

Gegeben: $f(x) := -\frac{1}{4} \cdot x^2$ $\qquad Q := \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}$

**Teilaufgabe a)**

$x_Q := Q_{1,1} \qquad x_Q = 0 \qquad y_Q := Q_{1,2} \qquad y_Q = 2$

Wähle Kurvenpunkt P(u/v). $\quad x_P(u) := u$

Funktionswert: $\quad y_P(u) := f(x_P(u)) \qquad y_P(u) = -\frac{u^2}{4}$

1. Ableitung: $\quad f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) \qquad f'(x) = -\frac{x}{2}$

Allgem. Tangentengleichung: $\quad t(x,u) := f'(x_P(u)) \cdot (x - x_P(u)) + f(x_P(u))$

$$t(x,u) = \frac{u \cdot (u - x)}{2} - \frac{u^2}{4}$$

Aus dieser Tangenteschar wird genau die Tangente ausgewählt, die durch den vorgegebenen Punkt Q verläuft.

Es gilt: $Q \in G_t \quad \Leftrightarrow \quad t(x_Q, u) = y_Q \rightarrow \frac{u^2}{4} = 2$

Auflösen nach u: $\quad u0 := t(x_Q, u) = y_Q \text{ auflösen}, u \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot \sqrt{2} \\ -2 \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Auslesen: $\quad u_1 := u0_1 \qquad u_1 = 2 \cdot \sqrt{2}$

$u_2 := u0_2 \qquad u_2 = -2 \cdot \sqrt{2}$

Einsetzen liefert: $\quad t_1(x) := t(x, u_1) \qquad t_1(x) = 2 - \sqrt{2} \cdot x$

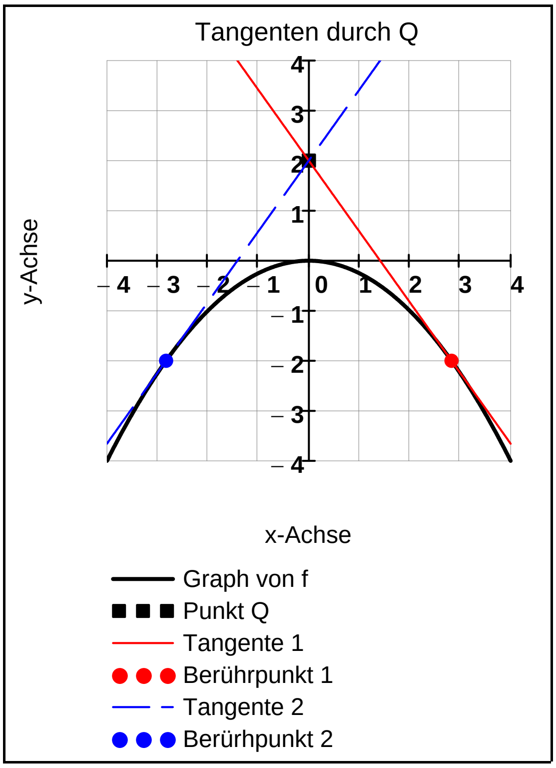
$t_2(x) := t(x, u_2) \qquad t_2(x) = \sqrt{2} \cdot x + 2$

**Teilaufgabe b)**

Berührpunkte: $\quad B_1 := \begin{pmatrix} u_1 & f(u_1) \end{pmatrix} \qquad B_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$

$B_2 := \begin{pmatrix} u_2 & f(u_2) \end{pmatrix} \qquad B_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \cdot \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$

**Teilaufgabe c)**




## Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm $\mathbf{f(x) = x^3}$, wobei $\mathbf{x} \in \mathbf{IR}$.

a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten t an $G_f$, die parallel zur Ursprungsgeraden g

mit der Steigung $\mathbf{m = \frac{4}{3}}$ sind.

b) Geben Sie die Berührpunkte an.

c) Zeichnen Sie den Graphen von f und die Tangente in einem kart. Koordinatensystem.

Gegeben: $f(x) := x^3$ $\quad m := \frac{4}{3}$

**Teilaufgabe a)**

Wähle den Kurvenpunkt P(u/v). $x_P(u) := u$

Funktionswert: $y_P(u) := f\left(x_P(u)\right)$ $\quad y_P(u) = u^3$

1. Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx} f(x)$ $\quad f'(x) = 3 \cdot x^2$

Bedingung: $f'\left(x_P(u)\right) = m \rightarrow 3 \cdot u^2 = \frac{4}{3}$

Auflösen: $u0 := f'(x_P(u)) = m \text{ auflösen}, u \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Auslesen: $u_1 := u0_1$ $\quad u_1 = \frac{2}{3}$

$u_2 := u0_2$ $\quad u_2 = -\frac{2}{3}$

Allgemeine Tangente: $t(x,u) := f'(x_P(u)) \cdot (x - x_P(u)) + f(x_P(u))$

Einsetzen liefert: $t_1(x) := t(x,u_1)$ $\quad t_1(x) = \frac{4 \cdot x}{3} - \frac{16}{27}$

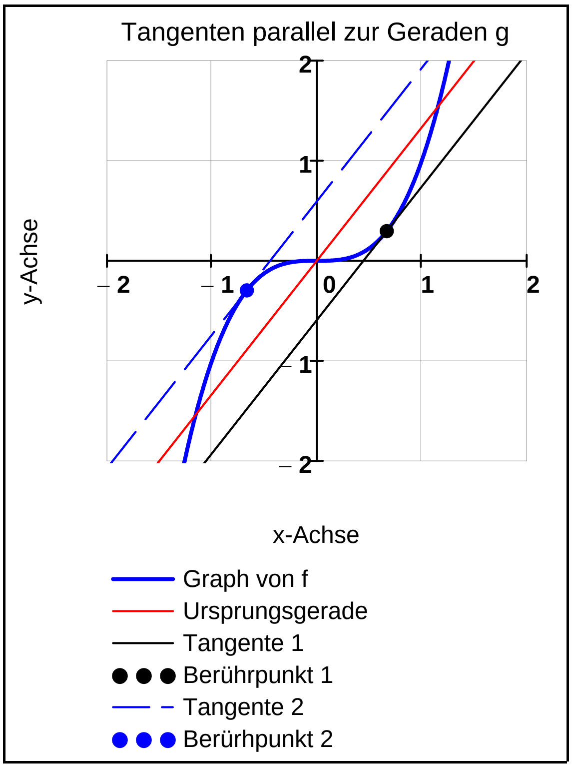
$t_2(x) := t(x,u_2)$ $\quad t_2(x) = \frac{4 \cdot x}{3} + \frac{16}{27}$

**Teilaufgabe b)**

Berührpunkte: $B_1 := \begin{pmatrix} u_1 & f(u_1) \end{pmatrix}$ $\quad B_1 \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{8}{27} \end{pmatrix}$

$B_2 := \begin{pmatrix} u_2 & f(u_2) \end{pmatrix}$ $\quad B_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{8}{27} \end{pmatrix}$

**Teilaufgabe c)**



## Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3\cdot x^2 + 2$, wobei $x \in \mathbb{R}$.
a) Bestimmen Sie den Funktionsterm der Tangenten $t_i$ an den Graphen $G_f$ vom Punkt **Q(2 /-3)** $\notin$ $G_f$ aus.
Beschreiben Sie die ***Art der Berührung*** und damit die Besonderheit der jeweiligen Tangente. Berechnen Sie die Berührpunkte.
b) Zeichnen Sie den Graphen $G_f$ der Funktion **f** mit den Tangenten $t_i$.

**Teilaufgabe a)**

Gegeben: Koordinaten von Q: $x_Q := 2$ $y_Q := -3$

$Q := \begin{pmatrix} x_Q & y_Q \end{pmatrix}$ $Q \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}$

Funktionsterm: $f(x) := x^3 - 3\cdot x^2 + 2$

Da man die Tangente an einen beliebigen Kurvenpunkt berechnen kann, wählt man einen Punkt P auf dem Graphen $G_f$.

Bedingung P(u/v) $\in G_f$: $x_P(u) := u$ $y_P(u) := f(x_P(u))$ $y_P(u) = u^3 - 3\cdot u^2 + 2$

1. Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx}f(x) = 3\cdot x^2 - 6\cdot x$

Steigung der Tangente: $f'(u) = 3\cdot u^2 - 6\cdot u$

Tangente: $t(x,u) := f'(u)\cdot(x-u) + f(u)$

$t(x,u) = 3\cdot u^2\cdot x + 3\cdot u^2 - 2\cdot u^3 - 6\cdot u\cdot x + 2$

Das ist eine Geradenschar. Daraus wählt man genau die Tangenten, die durch den Punkt P gehen.

Bedingung Q $\in G_f$: $t(x_Q, u) = y_Q \rightarrow u^3 - 3\cdot u^2 + (6\cdot u - 3\cdot u^2)\cdot(u-2) + 2 = -3$

Auflösen: $u0 := t(x_Q, u) = y_Q \text{ auflösen}, u \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

Bemerkung:
Es gibt eine zweifache Lösung (Tangente durchsetzt den Graphen) und eine einfache Lösung (Tangente berührt den Graphen).

Auslesen: $u_1 := u0_1$ $u_1 = 1$

$u_2 := u0_3$ $u_2 = \frac{5}{2}$

Tangentengleichungen:

Die Tangente durchsetzt den Graphen.

$t_1(x) := t(x, u_1)$

$t_1(x) = 3 - 3 \cdot x$

Berührpunkt:

$B_1 \rightarrow (1 \quad 0)$

Die Tangente berührt den Graphen.

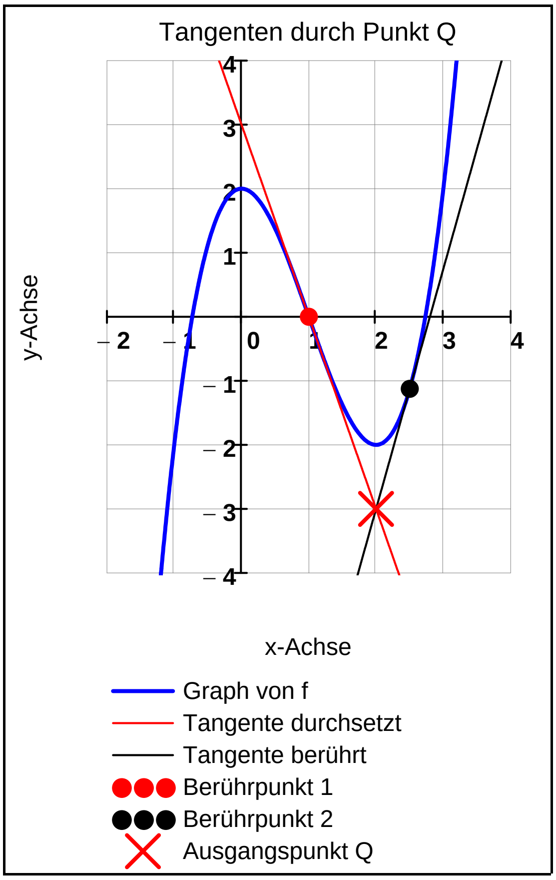
$t_2(x) := t(x, u_2)$

$t_2(x) = \frac{15 \cdot x}{4} - \frac{21}{2}$

Berührpunkt:

$B_2 \rightarrow \left( \frac{5}{2} \quad -\frac{9}{8} \right)$

**Teilaufgabe b)**




Funktionsterm:

$f(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 2$

Punkt Q:

$Q \rightarrow (2 \quad -3)$

Berührpunkt 1:

$B_1 \rightarrow (1 \quad 0)$

Tangente 1:

$t_1(x) = 3 - 3 \cdot x$

Berührpunkt 2:

$B_2 \rightarrow \left( \frac{5}{2} \quad -\frac{9}{8} \right)$

Tangente 2:

$t_2(x) = \frac{15 \cdot x}{4} - \frac{21}{2}$