

Die Betragsfunktion, Aufgabe 3 - Lösung



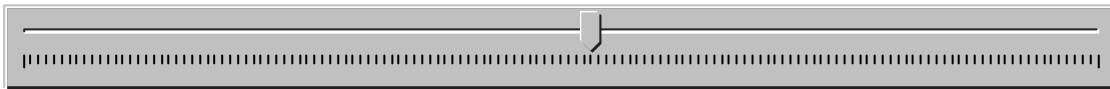
- Aufgabe mit Anwendungsbezug

Aufgabe 3

Drei Häuser A(0/50), B(20/25) und C(70/40) werden an die Hauptgasleitung (x-Achse) angeschlossen. Die Quartier-Nebenleitung soll rechtwinklig an die Hauptleitung angeschlossen werden und die Hauszuleitungen rechtwinklig an die Nebenleitung.

- Wo muss die Nebenleitung platziert werden, damit möglichst wenig gegraben werden muss?
Wie groß ist die Länge aller benötigten Rohre.
- Geben Sie mithilfe von CAS die betragsfreie Darstellung an.
- Es wird noch ein viertes Haus D(50/15) geplant. Wo muss jetzt die Nebenleitung gelegt werden?
Wie groß ist die Länge aller benötigten Rohre.
- Geben Sie mithilfe von CAS die betragsfreie Darstellung an.

Teilaufgabe a)



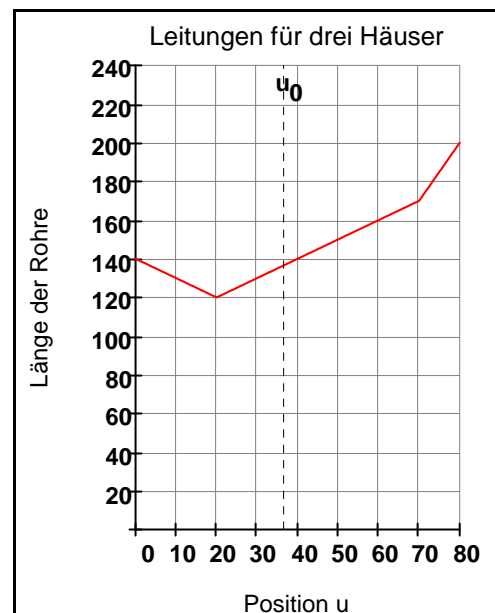
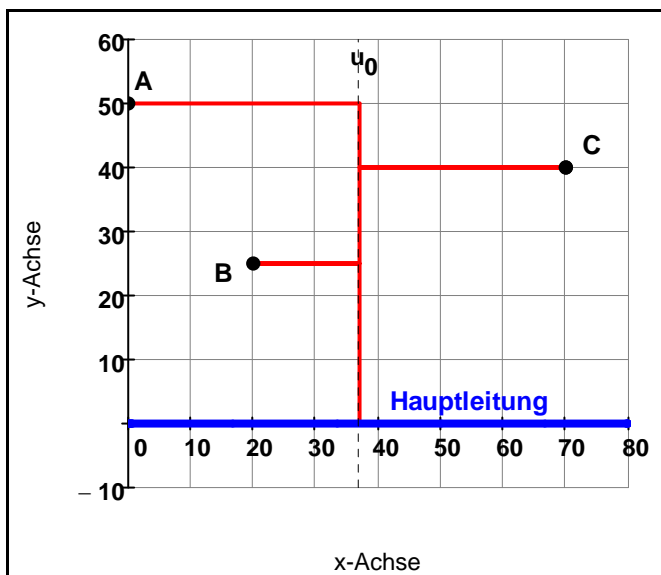
Darstellung

Zielfunktion für die Verbindung dreier Häuser aufstellen:

$$f(u) := 50 + u + |u - x_B| + |u - x_C| \quad \Rightarrow \quad f(u) = u + |u - 20| + |u - 70| + 50$$

Position der Nebenleitung: $u_0 = 37$

Funktionswert: $f(u_0) = 137$



Länge der benötigten Rohre: $L := f(u_0) \cdot m$ $L = 137 \text{ m}$

Minimale Länge: $L_{\min} := f(20) \cdot m$ $L_{\min} = 120 \text{ m}$

Teilaufgabe b)

Zielfunktion für die Verbindung dreier Häuser:

$$f(u) = u + |u - 20| + |u - 70| + 50$$

1. Fall: $u - 20 > 0 \wedge u - 70 > 0$ auflösen, $u \rightarrow 70 < u$

Funktionsterm: $f_1(u) := f(u)$ annehmen, $u > 70 \rightarrow 3 \cdot u - 40$

2. Fall: $u - 20 > 0 \wedge u - 70 < 0$ auflösen, $u \rightarrow 20 < u < 70$

Funktionsterm: $f_2(u) := f(u)$ annehmen, $20 < u < 70 = u + 100$

3. Fall: $u - 20 < 0 \wedge u - 70 < 0$ auflösen, $u \rightarrow u < 20$

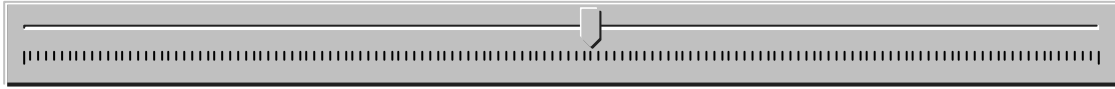
Funktionsterm: $f_3(u) := f(u)$ annehmen, $u < 20 \rightarrow 140 - u$

4. Fall: $u - 20 < 0 \wedge u - 70 > 0$ auflösen, $u \rightarrow$

Betragsfreie Darstellung:

$$h(u) = \begin{cases} (3 \cdot u - 40) & \text{if } u \geq 70 \\ (u + 100) & \text{if } 20 < u < 70 \\ (140 - u) & \text{if } 0 < u \leq 20 \end{cases}$$

Teilaufgabe c)



▢ Darstellung

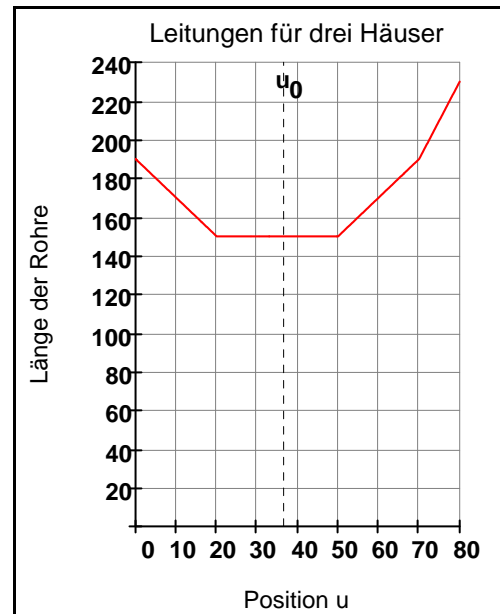
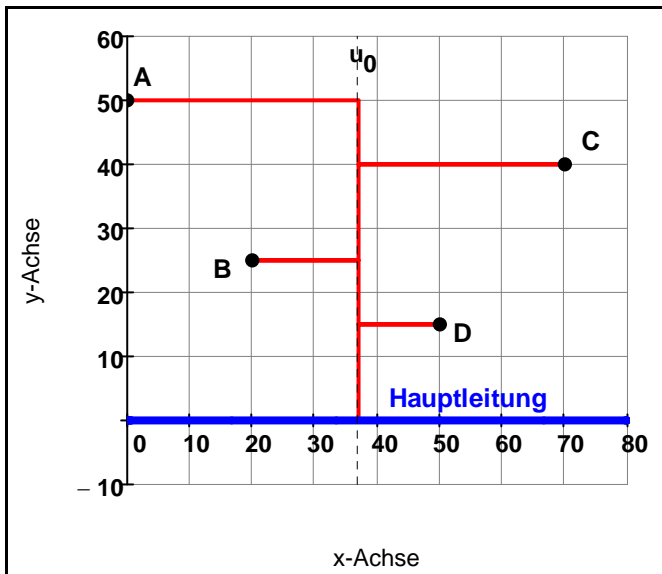
Zielfunktion für die Verbindung dreier Häuser aufstellen:

$$g(u) := 50 + u + |u - x_B| + |u - x_C| + |u - x_D|$$

$$g(u) = u + |u - 20| + |u - 50| + |u - 70| + 50$$

Position der Nebenleitung: $u_0 = 37$

Funktionswert: $g(u_0) = 150$



Länge der benötigten Rohre: $L := g(u_0) \cdot m$ $L = 150 \text{ m}$

Minimale Länge: $L_{\min} := g(20) \cdot m$ $L_{\min} = 150 \text{ m}$

Teilaufgabe d)

Zielfunktion für die Verbindung von vier Häusern aufstellen:

$$g(u) = u + |u - 20| + |u - 50| + |u - 70| + 50$$

1. Fall: $u - 20 > 0 \wedge u - 70 > 0 \wedge u - 50 > 0$ auflösen, $u \rightarrow 70 < u$

Funktionsterm: $g_1(u) := g(u)$ annehmen, $u > 70 = 4 \cdot u - 90$

2. Fall: $u - 20 > 0 \wedge u - 70 > 0 \wedge u - 50 < 0$ auflösen, $u \rightarrow$

3. Fall: $u - 20 > 0 \wedge u - 70 < 0 \wedge u - 50 > 0$ auflösen, $u \rightarrow 50 < u < 70$

Funktionsterm: $g_3(u) := g(u)$ annehmen, $50 < u < 70 = 2 \cdot u + 50$

4. Fall: $u - 20 > 0 \wedge u - 70 < 0 \wedge u - 50 < 0$ auflösen, $u \rightarrow 20 < u < 50$

Funktionsterm: $g_4(u) := g(u)$ annehmen, $20 < u < 50 = 150$

5. Fall: $u - 20 < 0 \wedge u - 70 < 0 \wedge u - 50 > 0$ auflösen, $u \rightarrow$

6. Fall: $u - 20 < 0 \wedge u - 70 < 0 \wedge u - 50 < 0$ auflösen, $u \rightarrow u < 20$

Funktionsterm: $g_6(u) := g(u)$ annehmen, $u < 20 \rightarrow 190 - 2 \cdot u$

7. Fall: $u - 20 < 0 \wedge u - 70 > 0 \wedge u - 50 > 0$ auflösen, $u \rightarrow$

8. Fall: $u - 20 < 0 \wedge u - 70 > 0 \wedge u - 50 < 0$ auflösen, $u \rightarrow$

Betragsfreie Darstellung:

$$g(u) = \begin{cases} 190 - 2 \cdot u & \text{if } 0 < u \leq 20 \\ 150 & \text{if } 20 < u \leq 50 \\ (2 \cdot u + 50) & \text{if } 50 < u \leq 70 \\ (4 \cdot u - 90) & \text{if } u > 70 \end{cases}$$