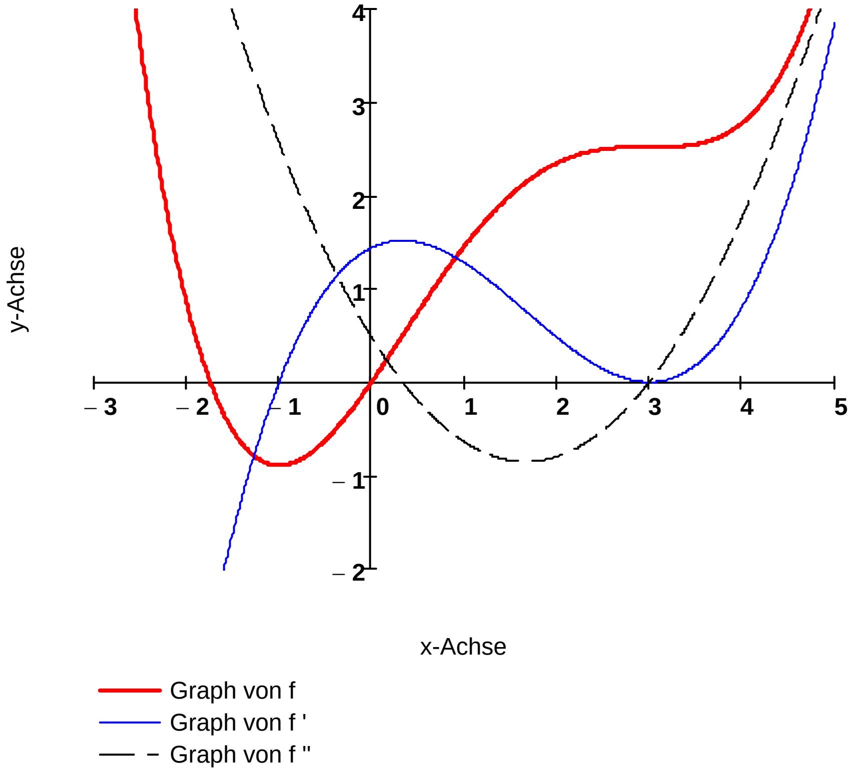
mathphys-online

DIFFERENTIALRECHNUNG BEI GANZRATIONALEN FUNKTIONEN



Inhaltsverzeichnis

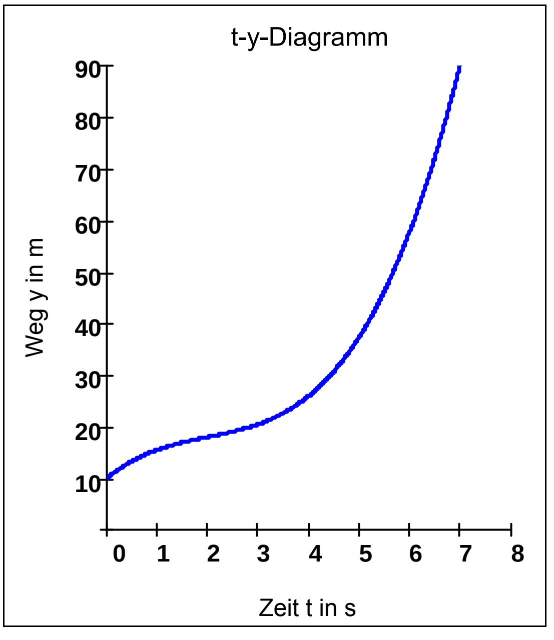
Graphiken erstellt mit Mathcad 15

Einführung in die Differentialrechnung

1 Der Ableitungsbegriff

1.1 Einführung

Die Differentialrechnung ermöglicht es, auf der Grundlage des Grenzwertbegriffs Eigenschaften von Funktionen zu untersuchen.
Bekannt ist der Funktionswert einer Funktion an einer bestimmten Stelle x_0.
Interessant ist nun die ***Änderung des Funktionswerts***, wenn sich das Argument um $\triangle x$ ändert.



Beispiel:
Der bei einer Bewegung eines Körpers zurückgelegte Weg lässt sich durch folgende Funktion beschreiben:

$$y(t) = 0{,}50\,\frac{m}{s^3}\cdot t^3 - 3{,}0\,\frac{m}{s^2}\cdot t^2 + 8{,}0\,\frac{m}{s}\cdot t + 10\,m$$

Bemerkungen zur Einheit:

Ruck (engl. Jerk): $[\,j\,] = \frac{m}{s^3}$;

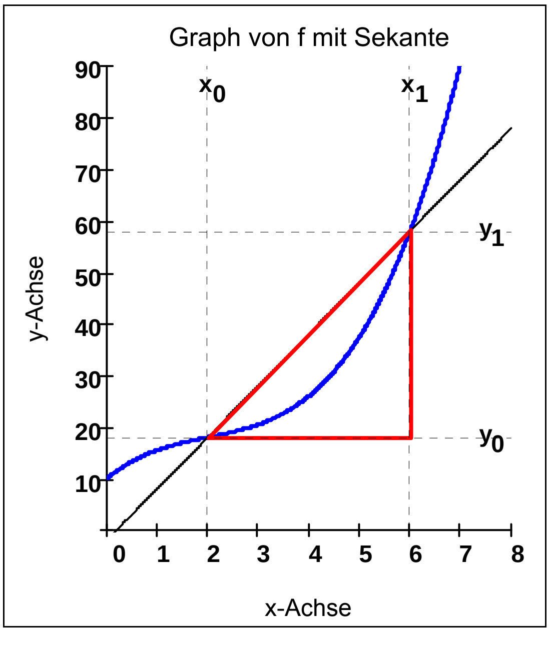
Beschleunigung: $[\,a\,] = \frac{m}{s^2}$

Geschwindigkeit: $[\,v\,] = \frac{m}{s}$

Fragestellungen:
Welche Wegstrecke Δy wird in einem bestimmten Zeitintervall Δt zurückgelegt?
Wie groß sind die Durchschnittsgeschwindigkeit und die Momentangeschwindigkeit?

1.2 Der Differenzenquotient

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 0{,}50\,x^3 - 3\,x^2 + 8\,x + 10$ und $x \in IR$.



Steigung der Sekante:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Weiter gilt: $y_0 = f(x_0)$; $y_1 = f(x_1)$;

Einsetzen: $m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Mit $h > 0$ gilt: $x_1 = x_0 + h$

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definition 1: ***Differenzenquotient an der Stelle x_0.***

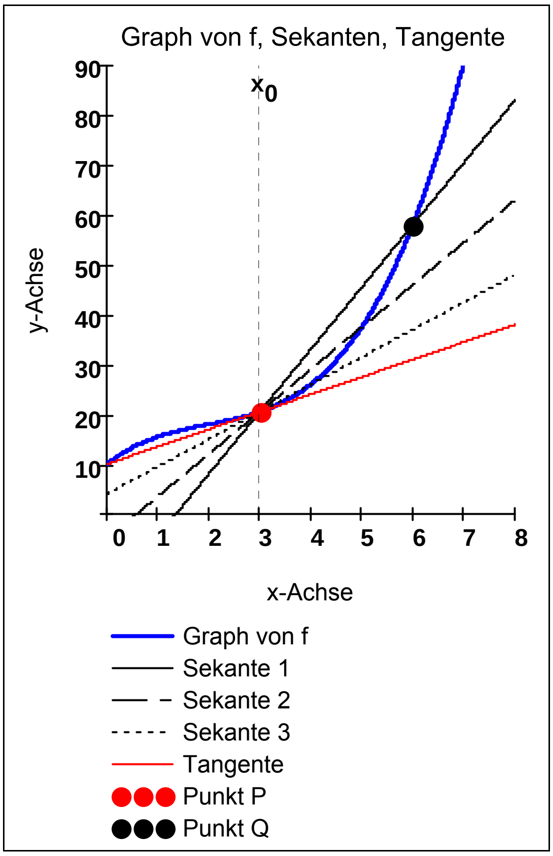
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Bezeichnung: ***Mittlere Änderungsrate im Intervall $[x_0 ;\ x_1]$***

Definition 2: ***Differenzenquotient an beliebiger Stelle x.***

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

1.3 Der Differentialquotient



Der Punkt P der Sekante ist fest.

Der Punkt Q der Sekante wandert auf dem Graphen von f zum Punkt P.

Das bedeutet:

Die ***Intervallsekante*** geht in

die ***Tangente*** über und

die ***Steigung der Sekante*** geht in

die ***Steigung der Tangente*** über.

Für beliebig kleine h-Werte, also $h \to 0$, entspricht die ***mittlere Änderungsrate*** im Intervall $[x_0 ;\ x_1]$ der ***lokalen Änderungsrate*** an der Stelle x_0. Allerdings ist dann die herkömmliche Berechnung des Differenzenquotienten nicht mehr möglich.

Mithilfe einer Grenzwertrechnung geht der ***Differenzenquotient*** in den

Differentialquotient über.

Definition 1: ***Differentialquotient an der Stelle x_0.***

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0} \left[\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right] = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right] = f'(x_0)}$$ (vgl. Merkhilfe Seite 4)

Bezeichnung: ***Momentane Änderungsrate an der Stelle x_0***, sie entspricht der Steigung der Tangente $f'(x_0)$ an der Stelle x_0.

Definition 2: ***Differentialquotient an beliebiger Stelle x.***

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right] = f'(x)}$$

Bezeichnung: $f'(x)$ heißt ***1. Ableitung der Funktion f an beliebiger Stelle x.***

Symbole: Für die Ableitung gibt es verschiedene Schreibweisen, die folgendermaßen benannt sind.

Leibniz: $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)]$ Cauchy: $f'(x)$ Newton: $\dot{f}(t) = \frac{d}{dt}[f(t)]$



Quelle: Historische Portraits, http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/BiogIndex.html

Bezeichnung: $\frac{d}{dx}$ und $\frac{d}{dt}$ werden auch ***Differentialoperatoren*** genannt

Definition 3:
Eine Funktion f mit $x \in ID_f$ heißt ***differenzierbar an der Stelle x_0***, wenn der Differenzenquotient für $x \to x_0$ bzw. für $h \to 0$ einen Grenzwert hat.

Für den Differentialquotient an der Stelle x_0 gilt: $f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0)$

Ist die Funktion f auf ganz ID_f differenzierbar, so erhält man eine neue Funktion, die ***Ableitungsfunktion*** $f': x \mapsto f'(x) \quad \wedge \quad x \in ID_f$.

1.4 Berechnung von Steigungen

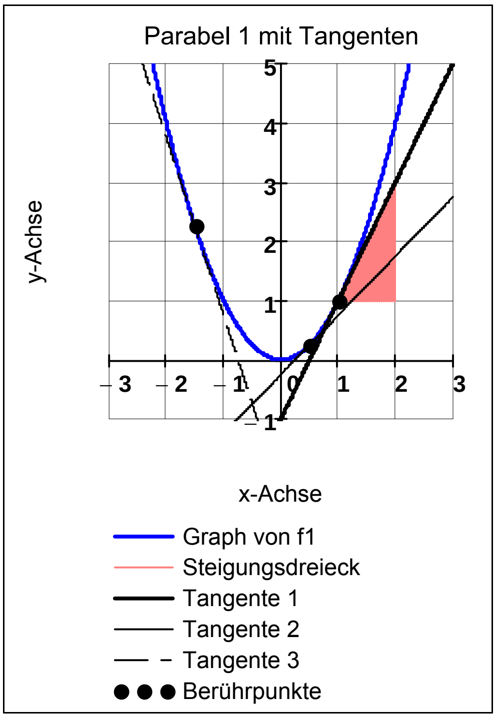
Aufgabe 1

Gegeben sind die Funktion f_i mit $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^2 + 1$ und $f_3(x) = 0{,}5\,x^2$, wobei $x \in IR$.

a) Bestimmen Sie den Differenzen- und den Differentialquotienten für die Funktionen f_i. Geben Sie jeweils die Ableitungsfunktion an.

b) Bestimmen Sie die Tangentensteigungen an den Stellen $x_1 = 1;\ x_2 = 0{,}5;\ x_3 = -1{,}5$.

c) Zeichnen Sie das Steigungsdreieck für die Tangente im Punkt $P(x_1 / f_i(x_1))$.



Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \frac{x^2 + 2\,x\,h + h^2 - x^2}{h} = \frac{h \cdot (2\,x + h)}{h}$$

$$= 2\,x + h$$

Differentialquotient:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} [2\,x + h] = 2\,x$$

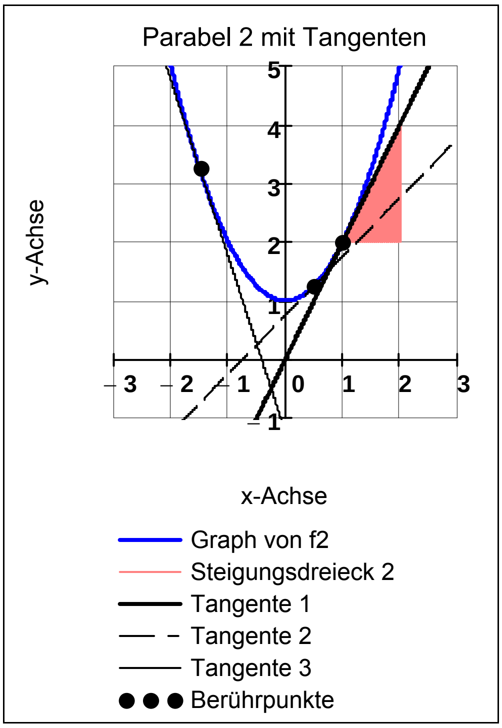
1. Ableitung: $f_1\,'(x) = 2\,x$

Tangentensteigungen:

$f_1\,'(1) = 2 \cdot 1 = 2$

$f_1\,'(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}5 = 1$

$f_1\,'(-1{,}5) = 2 \cdot (-1{,}5) = -3$



Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{h}$$

$$= \frac{x^2 + 2\,x\,h + h^2 + 1 - x^2 - 1}{h} = \frac{h \cdot (2\,x + h)}{h}$$

$$= 2\,x + h$$

Differentialquotient:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} = \lim_{h \to 0} [2\,x + h] = 2\,x$$

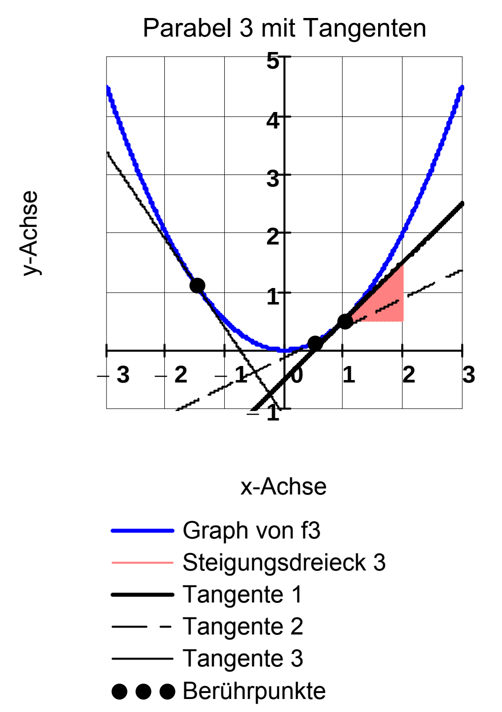
1. Ableitung: $f_2\,'(x) = 2\,x$

Tangentensteigungen:

$f_2\,'(1) = 2 \cdot 1 = 2$

$f_2\,'(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}5 = 1$

$f_2\,'(-1{,}5) = 2 \cdot (-1{,}5) = -3$



Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_3(x+h) - f_3(x)}{h} = \frac{0{,}5(x+h)^2 - 0{,}5\,x^2}{h}$$

$$= 0{,}5 \cdot \frac{x^2 + 2\,x\,h + h^2 - x^2}{h} = 0{,}5 \cdot \frac{h \cdot (2\,x + h)}{h}$$

$$= 0{,}5 \cdot (2\,x + h)$$

Differentialquotient:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f_3(x+h) - f_3(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[0{,}5 \cdot (2\,x + h)\right]$$

$$= 0{,}5 \cdot 2\,x = x$$

1. Ableitung: $f_3\,'(x) = x$

Tangentensteigungen:

$f_3\,'(1) = 1$

$f_3\,'(0{,}5) = 0{,}5$

$f_3\,'(-1{,}5) = -1{,}5$

Aufgabe 2

Berechnen Sie von folgenden Funktionen f_i die erste Ableitung mithilfe des Differenzen- bzw. Differentialquotienten:

a) $f_4(x) = x^3$ b) $f_5(x) = \dfrac{1}{x}$

Lösung zu Teilaufgabe a)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_4(x+h) - f_4(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3\,x^2\,h + 3\,x\,h^2 + h^3 - x^3}{h} = 3\,x^2 + 3\,x\,h + h^2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \left[3\,x^2 + 3\,x\,h + h^2\right] = 3\,x^2$$

Lösung zu Teilaufgabe b)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_5(x+h) - f_5(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x - (x+h)}{(x+h)\cdot x}}{h} = \frac{\frac{-h}{(x+h)\cdot x}}{h} = \frac{-1}{(x+h)\cdot x} = \frac{-1}{x^2 + h\,x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{-1}{x^2 + h\,x}\right] = \frac{-1}{x^2}$$

2 Ableitungsregeln (Merkhilfe Seite 4)

2.1 Potenzregel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=x^n$. Gesucht ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$.
Lösung:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+\binom{n}{1}\cdot x^{n-1}\cdot h+\binom{n}{2}\cdot x^{n-2}\cdot h^2+\ldots+\binom{n}{n-1}\cdot x\cdot h^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot h^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\binom{n}{1}x^{n-1}\cdot h+\binom{n}{2}x^{n-2}\cdot h^2+\ldots+\binom{n}{n-1}\cdot x\cdot h^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot h^n.}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\binom{n}{1}x^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}\cdot h+\ldots+\binom{n}{n-1}\cdot x\cdot h^{n-2}+\binom{n}{n}\cdot h^{n-1}\right]=\binom{n}{1}x^{n-1}=n\cdot x^{n-1}$$

Allgemeine Regel: $\boxed{f(x)=x^n \quad\Rightarrow\quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}}$

Beispiele

$f_4(x)=x^3 \quad\Rightarrow\quad f_4'(x)=3\cdot x^2$

$f_5(x)=x \quad\Rightarrow\quad f_5'(x)=1\cdot x^0=1$

Erweiterung der Regel auf negative oder auch gebrochene Exponenten.

Beispiele

$$f_7(x)=\frac{1}{x}=x^{-1} \quad\Rightarrow\quad f_7'(x)=-1\cdot x^{-1-1}=\frac{-1}{x^2}$$

$$f_8(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \quad\Rightarrow\quad f_8'(x)=-2\cdot x^{-2-1}=\frac{-2}{x^3}$$

$$f_9(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad f_9'(x)=\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

$$f_{10}(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}} \quad\Rightarrow\quad f_{10}'(x)=\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$$

2.2 Faktorregel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = a \cdot u(x)$. Gesucht ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a \cdot u(x+h) - a \cdot u(x)}{h} = a \cdot \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = a \cdot u'(x)$$

Allgemeine Regel: $\boxed{f(x) = a \cdot u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot u'(x)}$

Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^n + d$, wobei $x \in \mathbb{R}$, $a, d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
Gesucht ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$ mit Begründung.

Lösung: $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$

Begründung:

(1) Die multiplikative Konstante a bleibt erhalten.

(2) Der Exponent n erscheint in der Ableitungsfunktion als Faktor vor dem Potenzterm, der Exponent vermindert sich um eins.

(3) Die additive Konstante d fällt weg.

2.3 Summenregel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = u(x) + v(x)$. Gesucht ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = u'(x) + v'(x)$$

Allgemeine Regel: $\boxed{f(x) = u(x) + v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) + v'(x)}$

Ebenso: $f(x) = u(x) - v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) - v'(x)$

Beispiel

Gegeben ist die ganzrationale Funktion n-ten Grades f mit

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, wobei $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$.

Nach den Grenzwertregeln für Summen und Differenzen folgt für die Ableitungsfunktion:

$f(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 3 \cdot a_3 x^2 + 2 \cdot a_2 x + a_1$

3 Tangente und Normale an Graphen von Funktionen

3.1 Funktionale Beschreibung

Mithilfe der Ableitungsfunktion $f'(x)$ kann in jedem beliebigen Kurvenpunkt $P(x_0/f(x_0))$ die Steigung der zugehörigen Tangente berechnet werden. Es gilt also für die

- ***Tangentensteigung m*** in einem Punkt $P(x_0/f(x_0))$ des Graphen von f: $m = f'(x_0)$
- **Gleichung der Tangente** in einem Punkt $P(x_0/f(x_0))$ des Graphen von f:

(1) Berechnen der y–Koord. von P: $\mathbf{y_0 = f(x_0)}$

(2) Bilden der Ableitung von f(x): $\mathbf{f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)}$

(3) Ermitteln der Tangentensteigung m: $\mathbf{m = f'(x_0)}$

(4) Einsetzen dieser Werte in die Punkt-Steigungsform: $\mathbf{y = m \cdot (x - x_0) + y_0}$

Gleichung der Tangente: $\mathbf{t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)}$ (vgl. Merkhilfe Seite 5)

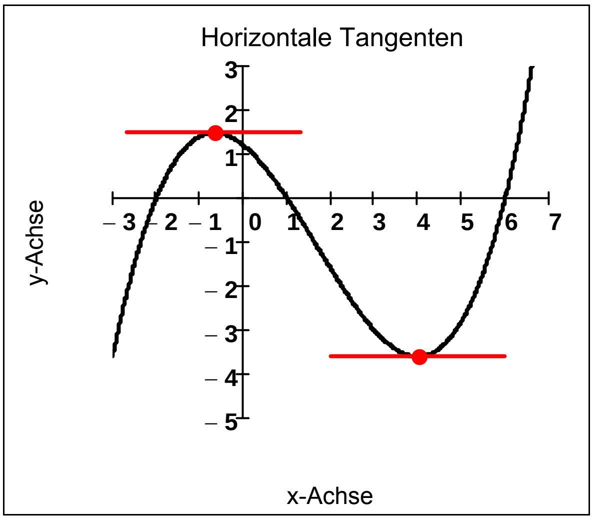
Gleichung der Normalen: $\mathbf{n(x) = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)}$

3.2 Typische Tangentenprobleme

Aufgabe 1

Gegeben: Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{10} \cdot \left(x^3 - 5x^2 - 8x + 12\right)$.

Gesucht: Kurvenpunkte $P(x_0/f(x_0))$ mit einer horizontalen (waagrechten) Tangente.



Lösung:

$$f'(x) = \frac{1}{10} \cdot \left(3x^2 - 10x - 8\right)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 10x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8)}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm 14}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{2}{3} \approx -0{,}7; \;\; x_2 = 4;$$

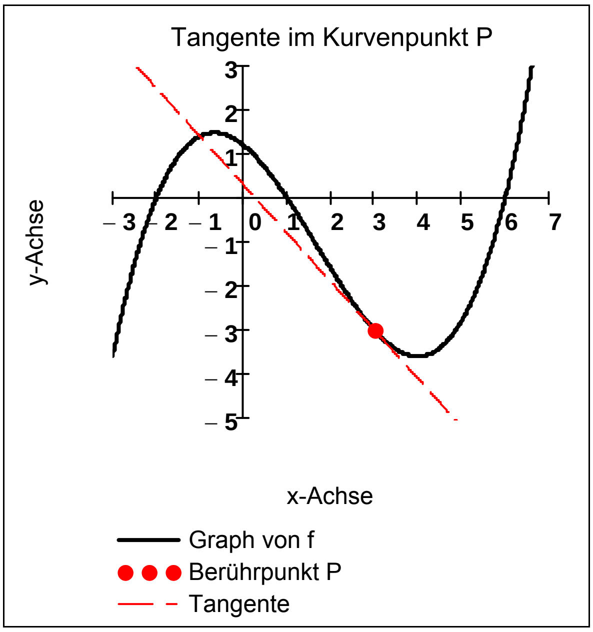
$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{40}{27} \approx 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad H(-0{,}7/1{,}5)$$

$$f(4) = -\frac{18}{5} = -3{,}6 \quad \Rightarrow \quad T(4/-3{,}6)$$

Aufgabe 2

Gegeben: Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{10} \cdot \left(x^3 - 5x^2 - 8x + 12\right)$.

Gesucht: Gleichung der Tangente t im Kurvenpunkt P(3/?).



Lösung:

Funktionswert: $y_P = f(3) = -3$

Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{10} \cdot \left(3x^2 - 10x - 8\right)$

Steigung der Tangente: $m = f'(3) = -\frac{11}{10}$

Tangente in Punkt-Steigungsform:

$t(x) = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3)$

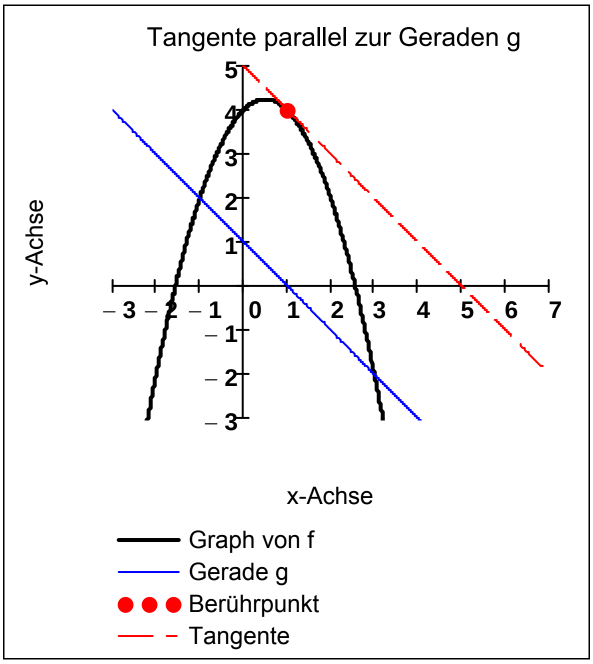
$t(x) = -\frac{11}{10} \cdot (x - 3) - 3$

$t(x) = -\frac{11}{10} x + \frac{3}{10}$

Aufgabe 3

Gegeben: Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = -x^2 + x + 4$.

Gesucht: Gleichung der Tangente t parallel zur Geraden $g(x) = -x + 1$.



Lösung:

Wähle Punkt $P \in G_f$: P(u/v)

Funktionswert: $v = f(u) = -u^2 + u + 4$

Ableitung: $f'(x) = -2x + 1$

Steigung der Tangente: $m_t = f'(u) = -2u + 1$

Steigung der Geraden: $m_g = -1$

Bedingung: $m_t = m_g$

$\Leftrightarrow \quad -2u + 1 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad u = 1$

Tangente: $t(x) = m_g \cdot (x - u) + f(u)$

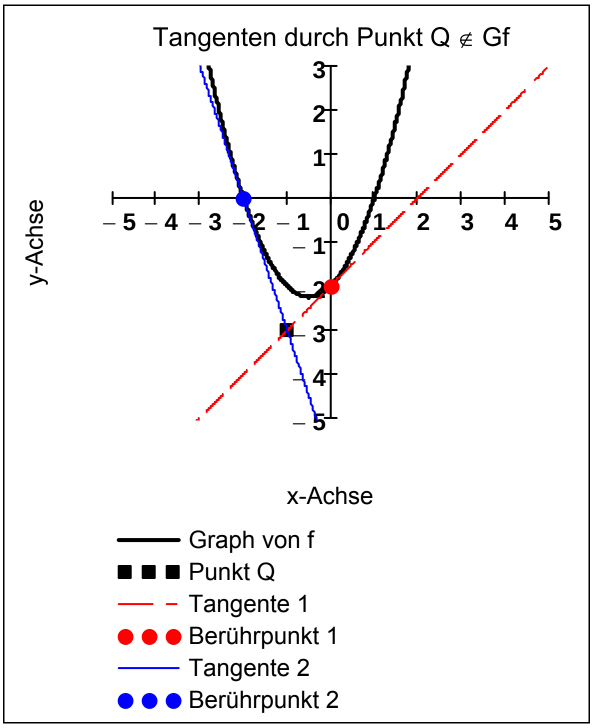
$t(x) = -(x - 1) + 4$

$t(x) = -x + 5$

Aufgabe 4

Gegeben: Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = x^2 + x - 2$.

Gesucht: Gleichung der Tangente t durch den Punkt $Q(-1/-3)$ mit $Q \notin G_f$.



Lösung:

Wähle Punkt $P \in G_f$: $P(u/v)$

Funktionswert: $v = f(u) = u^2 + u - 2$

Ableitung: $f'(x) = 2x + 1$

Steigung der Tangente: $m_t = f'(u) = 2u + 1$

Tangente: $t(x) = m_t \cdot (x - u) + f(u)$

$t(x) = (2u + 1) \cdot (x - u) + u^2 + u - 2$

$t(x) = (2u + 1)x - u^2 - 2$

Bedingung: $Q \in G_t$

$t(-1) = -3 \quad \Leftrightarrow \quad -(2u + 1) - u^2 - 2 = -3$

$\Leftrightarrow \quad u^2 + 2u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = 0;\ u_2 = -2$

Tangente 1: $t_1(x) = x - 2$

Tangente 2: $t_2(x) = -3x - 6$

4 Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen

4.1 Einführung

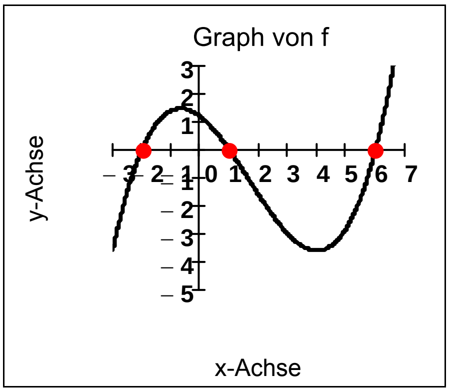
Beispiel

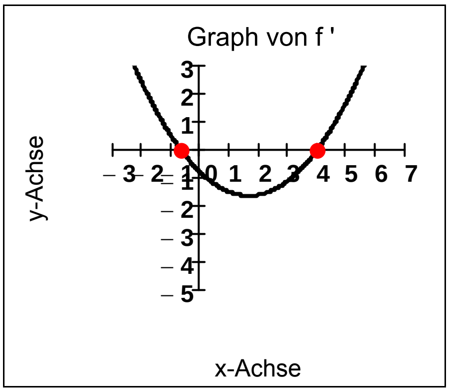
Gegeben ist der Funktionsterm $f(x) = 0{,}1 \cdot \left(x^3 - 5x^2 - 8x + 12\right)$ und die Graphen der Funktion f sowie der Ableitungsfunktionen f' und f''.

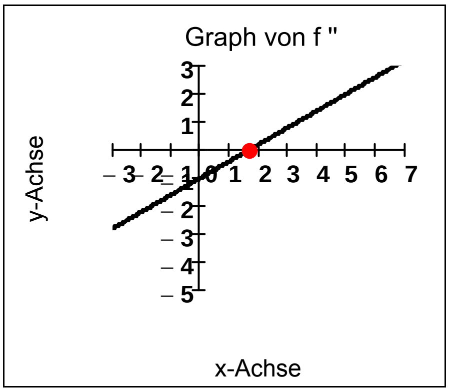
a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

b) Bestimmen Sie die erste Ableitungsfunktion $f'(x)$ und deren Nullstellen. Betrachten Sie den Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ und die Stellen extremaler Funktionswerte von G_f. Was kann man daraus für den Graphen von f und die Art der Extrema schließen?

c) Bestimmen Sie die zweite Ableitungsfunktion $f''(x)$. Betrachten Sie das Vorzeichen von $f''(x)$ und die Stellen extremaler Funktionswerte von G_f. Geben Sie jeweils für den Hochpunkt und den Tiefpunkt von G_f das Vorzeichen von $f''(x)$ an.







Teilaufgabe a)

$f(x) = 0$: Raten ($f(1) = 0$) und Polynomdivision liefert die Nullstellen $x_{01} = 1;\ x_{02} = -2;\ x_{03} = 6;$

Teilaufgabe b)

$f'(x) = 0{,}1 \cdot \left(3x^2 - 10x - 8\right);$

Hor. Tangenten: $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 10x - 8 = 0;$

$$x_{h1/h2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot (-8)}}{6} = \frac{10 \pm 14}{6}$$

$$x_{h1} = -\frac{2}{3};\ x_{h2} = 4;$$

x_{h1} und x_{h2} sind die Stellen mit horizontalen Tangenten. Damit können die Koordinaten der Extrempunkte H und T des Graphen von f bestimmt werden.

Wechselt $f'(x)$ das Vorzeichen von positiv nach negativ, ergibt sich ein Hochpunkt:

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{40}{27} \approx 1{,}5 \qquad \Rightarrow \qquad H(-0{,}7 / 1{,}5)$$

negativ nach positiv, ergibt sich ein Tiefpunkt:

$$f(4) = -\frac{18}{5} = -3{,}6 \qquad \Rightarrow \qquad T(4 / -3{,}6)$$

Teilaufgabe c)

$f''(x) = 0{,}1 \cdot (6x - 10);\ f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 10 = 0;\ x_f = \dfrac{5}{3}$

$f''\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{7}{5}$, also **negativ** für den **Hochpunkt**.

$f''(4) = \dfrac{7}{5}$, also **positiv** für den **Tiefpunkt**.

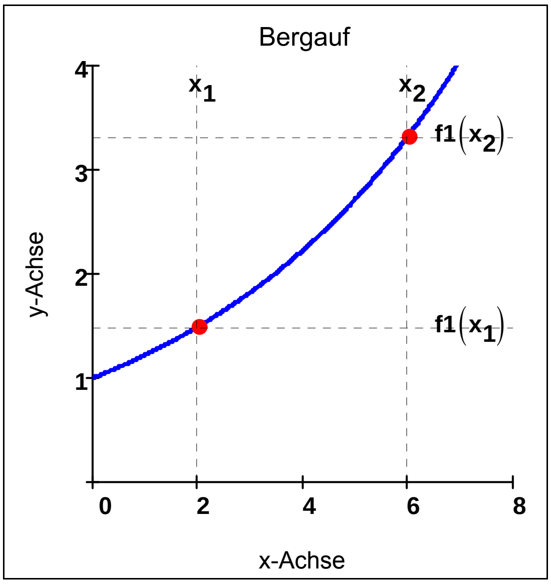
4.2 Monotonie

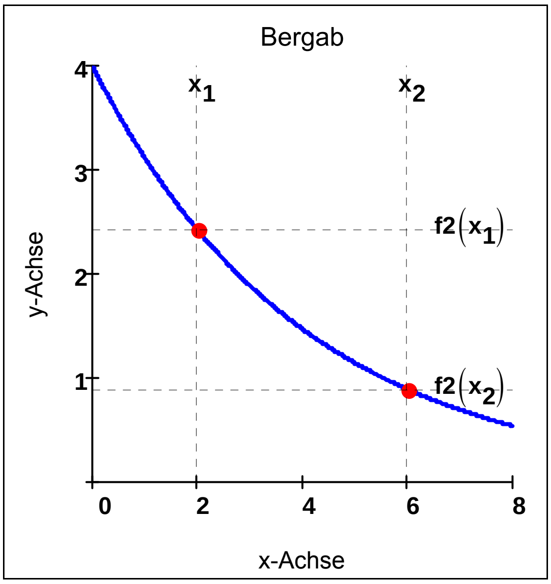
Definition der Monotonie

Eine Funktion f sei definiert auf einem Intervall $I = [a;b]$ mit $x_1, x_2 \in I$. Es gelte: $x_1 < x_2$.

Gilt für die Funktionswerte $f(x_1) < f(x_2)$, so heißt f im Intervall $[a;b]$ ***streng monoton zunehmend***, der Graph der Funktion f ***streng monoton steigend*** (kurz: sms).

Gilt für die Funktionswerte $f(x_1) > f(x_2)$, so heißt f im Intervall $[a;b]$ ***streng monoton abnehmend***, der Graph der Funktion ***streng monoton fallend*** (kurz: smf).





Monotonie-Kriterium

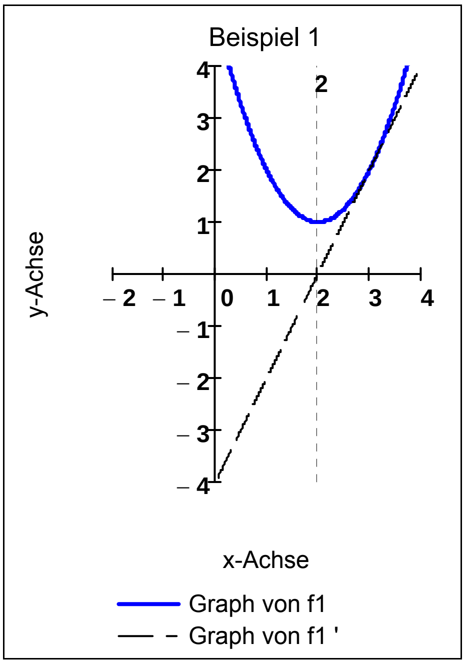
Ist $f'(x) > 0$, so ist der Graph der Funktion f **streng monoton steigend**
Ist $f'(x) < 0$, so ist der Graph der Funktion f **streng monoton fallend**

Maximale Monotonieintervalle

Gilt $f'(x_0) = 0$ für **einzelne** Stellen $x_0 \in [a;b]$, so ist der Graph der Funktion im Sinne der Definition im Intervall dennoch streng monoton steigend bzw. streng monoton fallend.

Beispiele

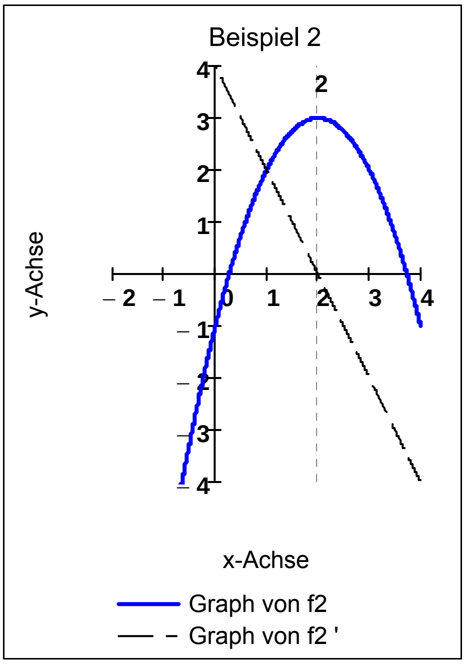
Gegeben sind Graphen der Funktionen $f_i(x)$ und $f_i'(x)$.
Geben Sie jeweils die Nullstelle der 1. Ableitung an und die maximalen Monotonieintervalle.



Nullstelle von f_1': $x_0 = 2$ einfach

G_{f1} ist streng monoton fallend in $]-\infty; 2]$ u.

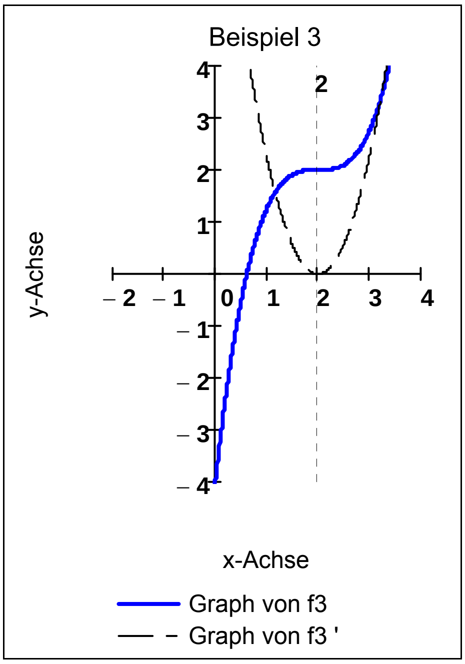
G_{f1} ist streng monoton steigend in $[2; \infty[$.



Nullstelle von f_2': $x_0 = 2$ einfach

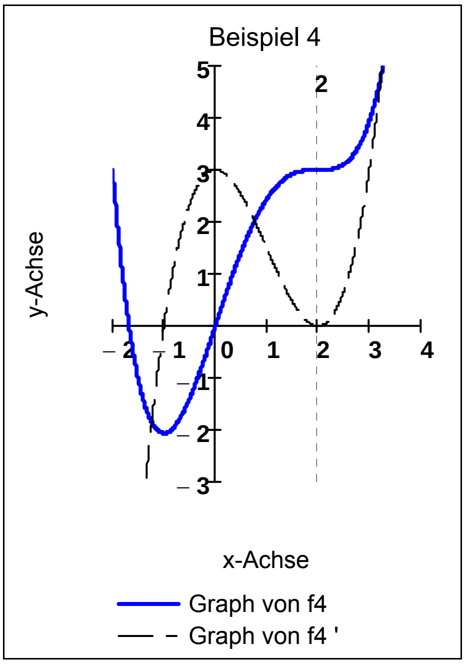
G_{f2} ist streng monoton steigend in $]-\infty; 2]$ u.

G_{f2} ist streng monoton fallend in $[2; \infty[$.



Nullstelle von f_3': $x_0 = 2$ zweifach

G_{f3} ist streng monoton steigend in IR .



NS von f_4': $x_1 = -1$ einfach, $x_2 = 2$ zweifach,

G_{f4} ist streng monoton fallend in $]-\infty; -1]$ u.

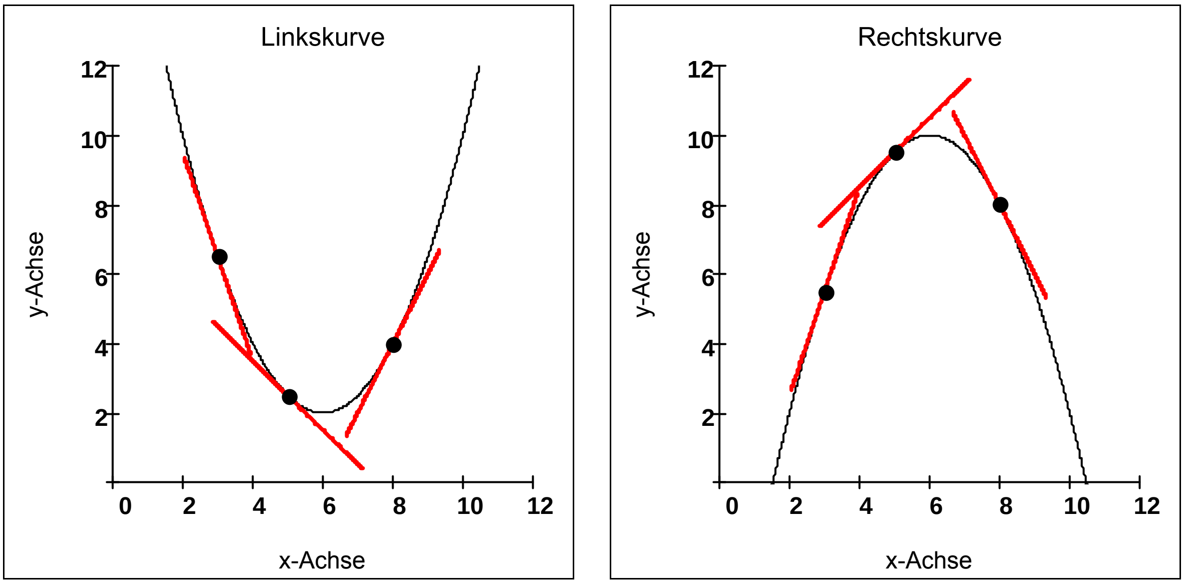
G_{f4} ist streng monoton steigend in $[-1; \infty[$.

4.3 Krümmung

Definition der Krümmung

Der Graph einer Funktion f heißt in einem Intervall $I = [a;b]$ **linksgekrümmt** (kurz: lk), wenn die Steigung der Tangente streng monoton zunimmt.
Der Graph einer Funktion f heißt in einem Intervall $I = [a;b]$ ***rechtsgekrümmt*** (kurz: rk), wenn die Steigung der Tangente im Intervall I streng monoton abnimmt.

Bemerkung: Die Krümmung wird auch als die ***Steigung der Steigung*** bezeichnet.



Kriterium der Krümmung

Der Graph der Funktion f heißt ***linksgekrümmt***, wenn für alle $x_0 \in [a, b]$ gilt: $f''(x_0) > 0$.

Der Graph der Funktion f heißt ***rechtsgekrümmt***, wenn für alle $x_0 \in [a, b]$ gilt: $f''(x_0) < 0$.

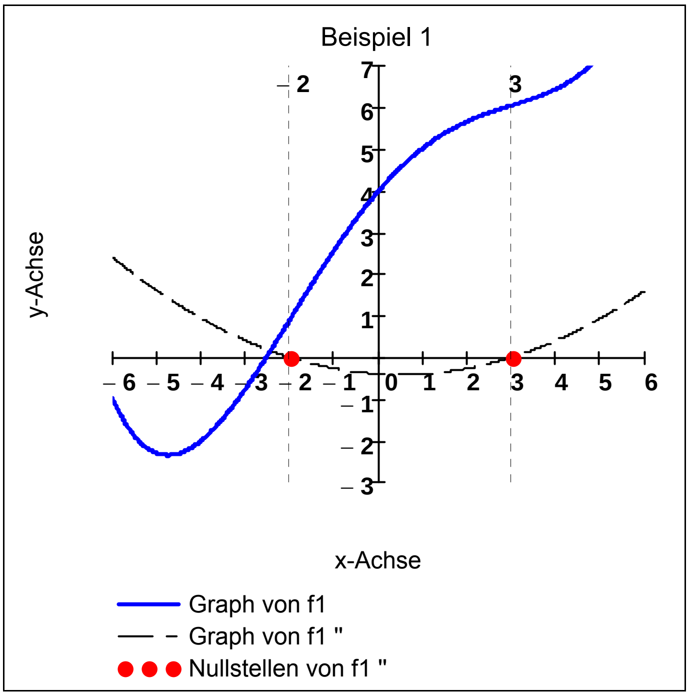
Der Graph der Funktion f besitzt eine ***Flachstelle x_0***, wenn $f''(x_0) = 0$.

Maximale Krümmungsintervalle

Gilt $f''(x_0) = 0$ für **einzelne** Stellen $x_0 \in [a;b]$, so ist der Graph der Funktion im Sinne der Definition im Intervall dennoch linksgekrümmt bzw. rechtsgekrümmt.

<u>Beispiele</u>

Gegeben sind Graphen der Funktionen $f_i(x)$ und $f_i''(x)$.
Geben Sie jeweils Lage und Art der Nullstellen der 2. Ableitung an und die maximalen Krümmungsintervalle.



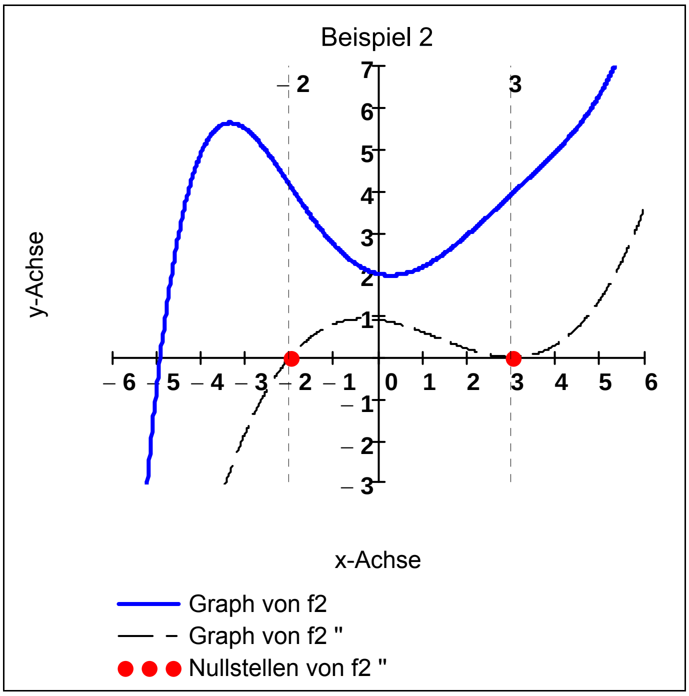
Nullstellen von f_1'':

$x_1 = -2$ einfach; $x_2 = 3$ einfach;

G_{f1} ist linksgekrümmt in $]-\infty; -2]$,

G_{f1} ist rechtsgekrümmt in $[-2; 3]$ und

G_{f1} ist linksgekrümmt in $[3; \infty[$.



Nullstellen von f_2'':

$x_1 = -2$ einfach; $x_2 = 3$ zweifach;

G_{f2} ist rechtsgekrümmt in $]-\infty; -2]$

und G_{f2} ist linksgekrümmt in $[-2; \infty[$.

4.4 Lokale (relative) Extrema und Extrempunkte

Definition

Besitzt die Ableitungsfunktion f'(x) eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, so ändert sich das Monotonieverhalten:

Wechselt der Graph von f an der Stelle x_0 sein Monotonieverhalten von streng monoton steigend nach streng monoton fallend, so heißt
$y_0 = f(x_0)$ ***lokales Maximum*** und der Punkt $(x_0 / f(x_0))$ ***lokaler Hochpunkt***.
Oder: $f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad G_f$ ist rechtsgekrümmt $\quad \Rightarrow \quad (x_0 / f(x_0))$ lokaler Hochpunkt.

Wechselt der Graph von f an der Stelle x_0 sein Monotonieverhalten von streng monoton fallend nach streng monoton steigend, so heißt
$y_0 = f(x_0)$ ***lokales Minimum*** und $(x_0 / f(x_0))$ ***lokaler Tiefpunkt***.
Oder: $f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad G_f$ ist linksgekrümmt $\quad \Rightarrow \quad (x_0 / f(x_0))$ lokaler Tiefpunkt.

Bestimmung lokaler Extrema und Extrempunkte

1. Schritt: Notwendige Bedingung
   Aufsuchen der Stellen mit horizontaler Tangente
2. Schritt: Hinreichende Bedingung:
   Die 1. Ableitung hat eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel
   Nachweis der Art des relativen Extremums über das Monotoniekriterium oder über das Krümmungsverhalten.
3. Schritt: Für den Extrempunkt Berechnung der y-Koordinate.

4.5 Flachpunkt und Wendepunkt

Definition Flachpunkt und Wendepunkt

Der Graph der Funktion f ist besitzt an der Stelle x_0 eine ***Flachstelle*,** wenn $f''(x_0) = 0$ gilt.
Der zugehörige Kurvenpunkt $(x_0 / f(x_0))$ heißt ***Flachpunkt***.

Ein Flachpunkt heißt ***Wendepunkt***, wenn sich dort das Krümmungsverhalten ändert.

Ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente heißt ***Terrassenpunkt***.

Nachweis für den Wendepunkt

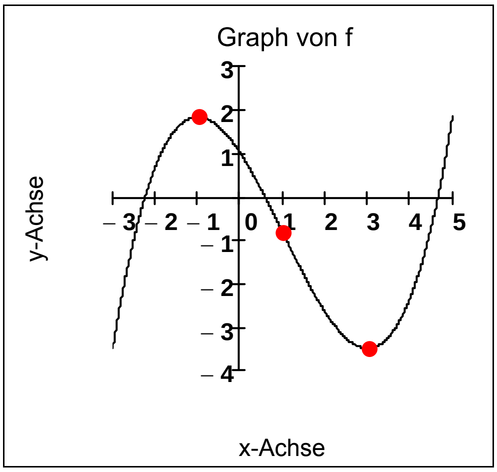
1. Schritt: Notwendige Bedingung)
   Suche die Stellen mit $f''(x_0) = 0$
2. Schritt: Hinreichende Bedingung
   Die 2. Ableitung hat eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel,
   das heißt, dass sich das Krümmungsverhalten ändert.
3. Schritt: Berechnung der y-Koordinate

Nachweis für den Terrassenpunkt

$f'(x_0) = 0 \;\wedge\; f''(x_0) = 0$ und x_0 ist Nullstelle der 2. Ableitung mit Vorzeichenwechsel

Aufgabe 1

Gegeben ist der Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(x^3 - 3x^2 - 9x + 6\right)$ mit $x \in IR$
sowie die Graphen der Funktion f und der Ableitungsfunktionen f' und f''.
a) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und Lage und Art der Extremstellen.
b) Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten und Lage und Art der Flachstellen.
c) Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten der markierten Punkte von G_f.

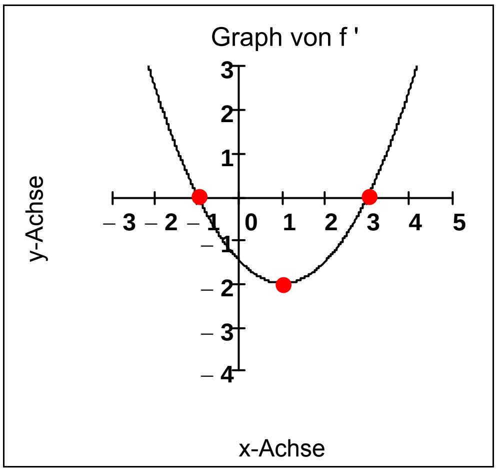


Teilaufgabe c)

Hochpunkt: $f(-1) = \frac{11}{6} \approx 1{,}8; \quad \Rightarrow \quad H(-1/1{,}8)$

Tiefpunkt: $f(3) = -\frac{7}{2} = -3{,}5; \quad \Rightarrow \quad T(3/-3{,}5)$

Wendepunkt: $f(1) = -\frac{5}{6} \approx -0{,}8; \quad \Rightarrow \quad W(1/-0{,}8)$



Teilaufgabe a)

$f'(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(3x^2 - 6x - 9\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 - 2x - 3\right)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1) \cdot (x-3) = 0$

$x_1 = -1; \; x_2 = 3;$

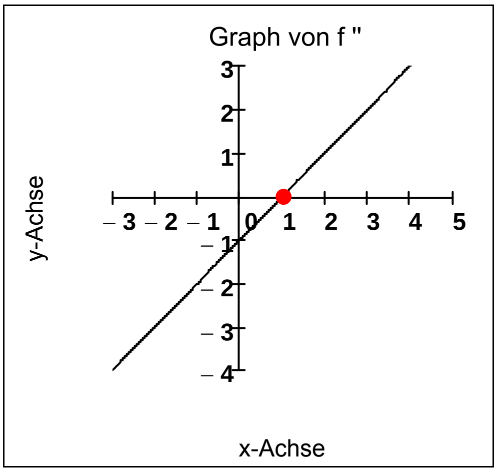
G_f ist streng monoton steigend in $\left]-\infty; -1\right]$,

G_f ist streng monoton fallend in $\left[-1; 3\right]$,

G_f ist streng monoton steigend in $\left[3; \infty\right[$.

$\Rightarrow$ rel. Hochpunkt an der Stelle $x_1 = -1$.

$\Rightarrow$ rel. Tiefpunkt an der Stelle $x_2 = 3$.



Teilaufgabe b)

$f''(x) = x - 1$

$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = 0$

$x_3 = 1;$

G_f ist rechtsgekrümmt in $\left]-\infty; 1\right]$,

G_f ist linksgekrümmt in $\left[1; \infty\right[$.

$\Rightarrow$ Wendepunkt an der Stelle $x_3 = 1$.

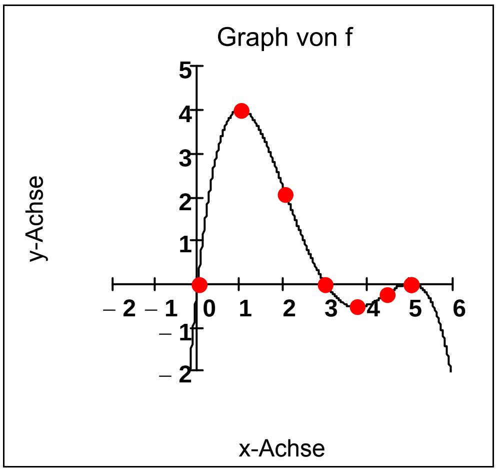
Aufgabe 2

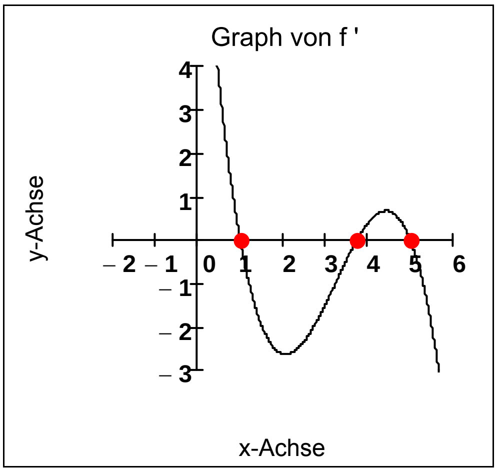
Gegeben ist der Funktionsterm $f(x) = -\frac{1}{8} \cdot \left(x^4 - 13x^3 + 55x^2 - 75x\right)$ mit $x \in IR$
sowie die Graphen der Funktion f und der Ableitungsfunktionen f' und f''.

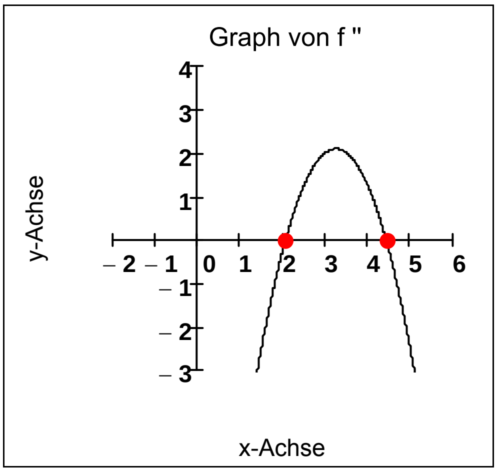
a) Bestimmen Sie Lage und Art der Nullstellen.

b) Bestimmen Sie die maximalen Monotonie- und Krümmungsintervalle.

c) Bestimmen Sie Lage und Art aller markierten Punkte.
Runden Sie, falls nötig, jeweils auf eine Nachkommastellen.







a) Nullstellen: $f(x) = 0$

Ausklammern und Polynomdivision liefert:

$x_1 = 0$ einfach, $x_2 = 3$ einfach;

$x_3 = 5$ zweifach;

b) 1. Ableitung:

$f'(x) = -\frac{1}{8} \cdot \left(4x^3 - 39x^2 + 110x - 75\right)$

Hor. Tangenten: $f'(x) = 0$

Raten: $x_{E1} = 5$ und Polynomdivision liefert:

$f'(x) = -\frac{1}{8} \cdot (x-5) \cdot \left(4x^2 - 19x + 15\right)$

$4x^2 - 19x + 15 = 0 \Rightarrow x_{E2} = 1;\ x_{E3} = \frac{15}{4} = 3{,}75$

G_f ist streng monoton steigend in $\left]-\infty; 1\right]$,

G_f ist streng monoton fallend in $\left[1; 3{,}75\right]$,

G_f ist streng monoton steigend in $\left[3{,}75; 5\right]$ und

G_f ist streng monoton fallend in $\left[5; \infty\right[$,

2. Ableitung: $f''(x) = -\frac{1}{8} \cdot \left(12x^2 - 78x + 110\right)$

Flachstellen: f''(x)=0: $12x^2 - 78x + 110 = 0$

$x_{W1} = 2{,}1;\ x_{W2} = 4{,}4;$

G_f ist rechtsgekrümmt in $\left]-\infty; 2{,}1\right]$,

G_f ist linksgekrümmt in $\left[2{,}1; 4{,}4\right]$ und

G_f ist rechtsgekrümmt in $\left[4{,}4; \infty\right[$.

c) Berechnung der Funktionswerte

rel. Hochpunkt: $f(1) = 4;\ H_1(1/4)$

rel. Tiefpunkt: $f(3{,}75) = -0{,}55;\ T(3{,}8/-0{,}6)$

rel. Hochpunkt: $f(5) = 0;\ H_2(5/0)$

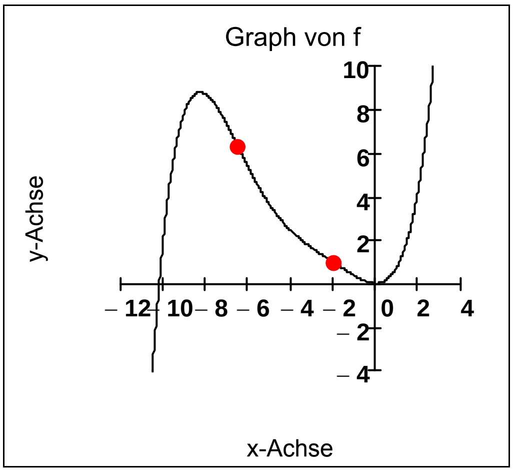
Wendepunkt: $f(2{,}07) = 2{,}07;\ W_1(2{,}1/2{,}1)$

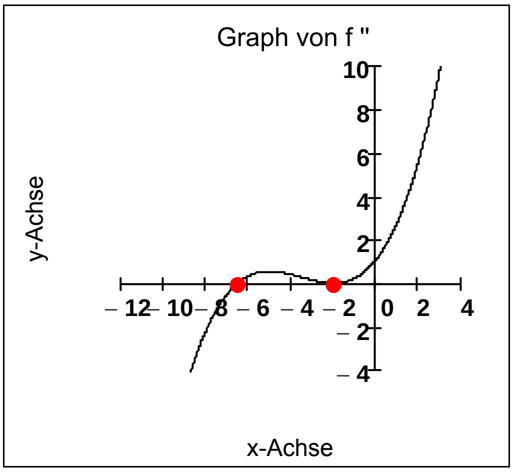
Wendepunkt: $f(4{,}43) = -0{,}26;\ W_2(4{,}4/-0{,}3)$

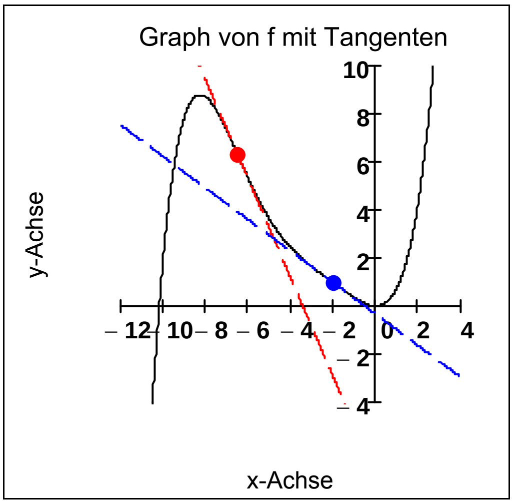
Aufgabe 3

Gegeben ist der Funktionsterm $f(x)=\frac{1}{1000}\cdot\left(2x^5+35x^4+200x^3+520x^2\right)$ mit $x\in\mathbb{R}$ sowie die Graphen der Funktionen f und f''.

a) Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten und Lage und Art der markierten Punkte.
b) Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der Tangente in den markierten Punkten von G_f.
c) Beschreiben Sie jeweils die geometrische Besonderheit der Tangente.







Teilaufgabe a)

1. Ableitung:

$$f'(x)=\frac{1}{100}\cdot\left(x^4+14x^3+60x^2+104x\right)$$

2. Ableitung:

$$f''(x)=\frac{1}{50}\cdot\left(2x^3+21x^2+60x+52\right)$$

Flachstellen: $f''(x)=0$

$$\Leftrightarrow 2x^3+21x^2+60x+52=0$$

Raten: $f''(-2)=\frac{1}{50}\cdot(-16+84-120+52)=0$

$x_1=-2$

Polynomdivision liefert:

$$f''(x)=\frac{1}{50}\cdot(x+2)\left(2x^2+17x+26\right)$$

Weitere Flachstellen: $2x^2+17x+26=0$

$x_2=-2;\ x_3=-6{,}5;$

$\Rightarrow\quad x_{1/2}=-2$ zweifach; $x_3=-6{,}5$ einfach;

G_f ist rechtsgekrümmt in $\left]-\infty;-6{,}5\right]$ und

G_f ist linksgekrümmt in $\left[-6{,}5;\infty\right[$.

Wendepunkt: $f(-6{,}5)=6{,}31;\Rightarrow W(-6{,}5/6{,}3)$

Flachpunkt: $f(-2)=0{,}98;\Rightarrow F(-2/0.98)$

Teilaufgabe b)

Tangenten mithilfe der Punkt-Steigungsform:

$t_W(x)=f'(-6{,}5)\cdot(x+6{,}5)+f(-6{,}5)$

$t_W(x)=-2{,}06x-7{,}05$

Die Tangente durchsetzt den Graphen von f.

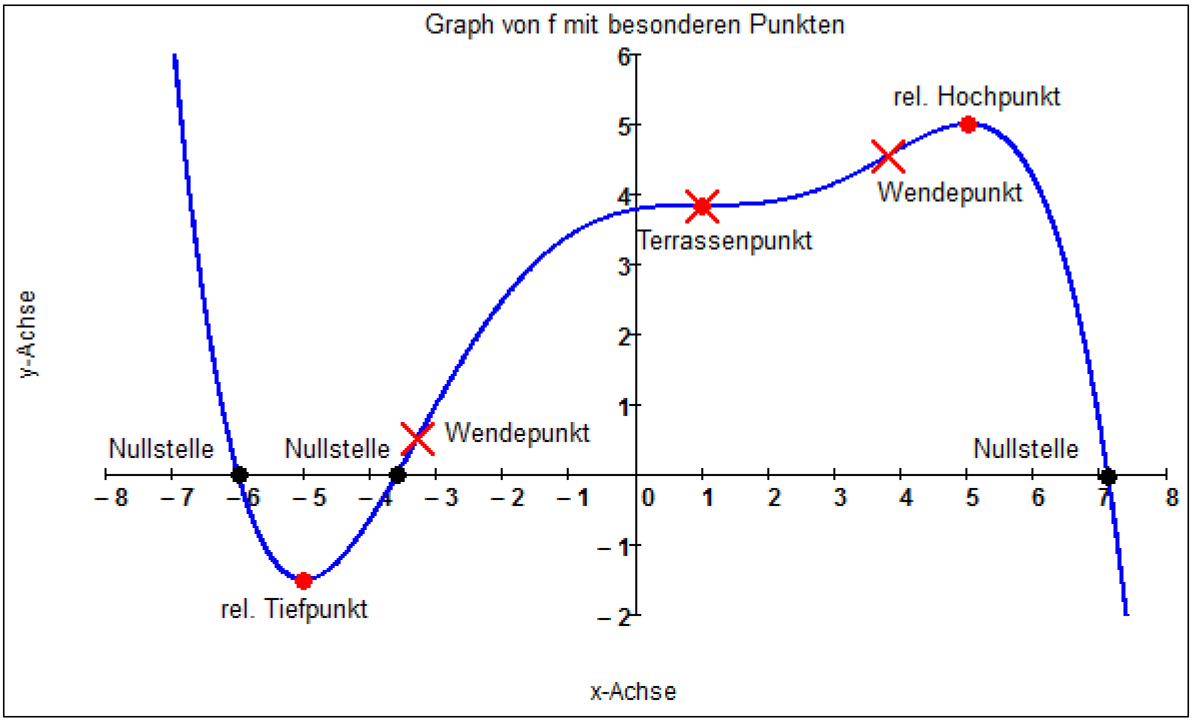
$t_F(x)=f'(-2)\cdot(x+2)+f(-2)$

$t_F(x)=-0{,}66x-0{,}34$

Die Tangente berührt den Graphen von f.

4.6 Zusammenfassung der Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen

Umfassende Untersuchung von Funktionen und ihren Graphen auf bestimmte Eigenschaften.



- Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Symmetrieeigenschaften des Graphen
- Nullstellen
- Monotoniebereiche
- Relative Extrempunkte
- Krümmungsverhalten
- Flachpunkte oder Wendepunkte
- Zeichnen des Graphen mit Wertetabelle

Beispiel für „Mathe-Freaks“

Gegeben ist eine Funktion f mit dem Funktionsterm

$$f(x) = \frac{13}{20000} \cdot \left(-2x^5 + 5x^4 + 80x^3 - 250x^2 + 250x + \frac{75625}{13} \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie die Monotonieeigenschaften, Art und Lage (nur x-Werte) der relativen Extrempunkte, das Krümmungsverhalten, Wendepunkte und den Terrassenpunkt.

Hinweis:
Nullstellen durch Intervallhalbierung näherungsweise bestimmen.
Der Graph G_f hat an der Stelle $x_0 = 1$ einen Terrassenpunkt. Überlegen Sie sich, was dies für die erste bzw. zweite Ableitungsfunktion bedeutet.

4.7 Anwendungen in der Physik

Definitionen zur Kinematik

Gegeben ist der zeitliche Ablauf des Weges eines Massenpunktes in x-Richtung in funktionaler Darstellung: x(t)

Momentangeschwindigkeit des Massenpunktes: $v(t) = \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}[x(t)]$

Momentane Beschleunigung eines Massenpunktes: $a(t) = \dot{v}(t) = \frac{d}{dt}[v(t)] = \ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2}[x(t)]$

Momentane Änderungsrate der Beschleunigung, der Ruck: $j(t) = \dot{a}(t) = \frac{d}{dt}[a(t)]$

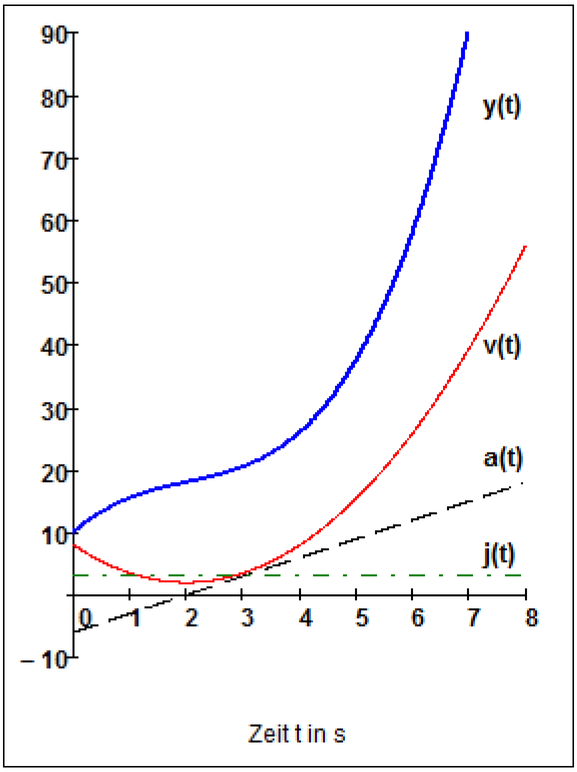
Beispiel 1: Geradlinige Bewegung mit konstanter Beschleunigung

Ortskoordinate zum Zeitpunkt t: $x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2$

Momentangeschwindigkeit: $v(t) = \dot{x}(t) = v_0 + a_0 \cdot t$

Momentane Beschleunigung: $a(t) = \dot{v}(t) = a_0$

Beispiel 2: Geradlinige Bewegung mit nicht konstanter Beschleunigung (vgl. 1.1)



Ortskoordinate zum Zeitpunkt t:

$$y(t) = 0{,}50 \frac{m}{s^3} \cdot t^3 - 3{,}0 \frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 8{,}0 \frac{m}{s} \cdot t + 10\,m$$

Momentangeschwindigkeit:

$$v(t) = \dot{y}(t) = 1{,}50 \frac{m}{s^3} \cdot t^2 - 6{,}0 \frac{m}{s^2} \cdot t + 8{,}0 \frac{m}{s}$$

Momentante Beschleunigung:

$$a(t) = \dot{v}(t) = 3{,}00 \frac{m}{s^3} \cdot t - 6{,}0 \frac{m}{s^2}$$

Ruck:

$$j(t) = \dot{a}(t) = 3{,}00 \frac{m}{s^3}$$

Aufgabe 1
Gegeben sind die Bewegungsgleichungen x(t) und y(t) für den Massenschwerpunkt eines Körpers, der in der Höhe H mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 in horizontaler Richtung unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes weggeworfen wird:

$$(1)\ \ x(t) = v_0 \cdot t \quad \wedge \quad (2)\ \ y(t) = H - \frac{1}{2} g \cdot t^2 .$$

a) Bestimmen Sie die Bahnkurve y(x) mit allgemeinen Größen.

b) Bestimmen Sie die Auftreffstelle und den Auftreffwinkel mit allgemeinen Größen mithilfe der Differentialrechnung.

c) Erstellen Sie eine Zeichnung der Bahnkurve mit Tangente an der Auftreffstelle für

$$H = 30\,m;\ v_0 = 20\frac{m}{s};\ g = 9{,}81\frac{m}{s^2};$$

Lösung zu a)

Aus (1) $t = \frac{x}{v_0}$

In (2) $y(x) = H - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad$ Bahnkurve: $y(x) = H - \frac{g}{2 \cdot v_0^{\,2}} \cdot x^2$

Lösung zu b)

Auftreffpunkt: $y(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H - \frac{g}{2 \cdot v_0^{\,2}} \cdot x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot H \cdot v_0^{\,2}}{g}}$

Die negative Lösung für den Auftreffpunkt ist nicht sinnvoll.

Wurfweite: $x_W = \sqrt{\frac{2 \cdot H \cdot v_0^{\,2}}{g}}$

Ableitungsfunktion: $y'(x) = -\frac{g}{v_0^{\,2}} \cdot x$

Steigung der Tangente an der Stelle x_W (Auftreffpunkt):

$$m_{Tang} = y'(x_W) = -\frac{g}{v_0^{\,2}} \cdot x_W = -\frac{g}{v_0^{\,2}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot H \cdot v_0^{\,2}}{g}} = -\sqrt{\frac{2 \cdot H \cdot v_0^{\,2} \cdot g^2}{g \cdot v_0^{\,4}}} = -\sqrt{\frac{2 \cdot H \cdot g}{v_0^{\,2}}} = -\frac{\sqrt{2 \cdot H \cdot g}}{v_0}$$

$$\alpha = \arctan\left(m_{Tang}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{2 \cdot H \cdot g}}{v_0}\right)$$

Vgl. mit der Herleitung in der Physik:

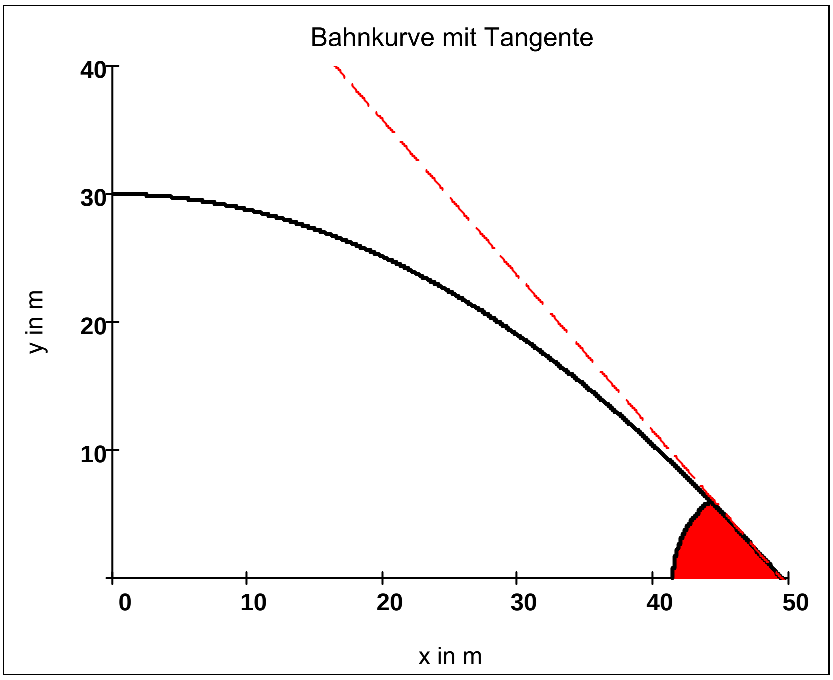
$$\alpha = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \arctan\left(\frac{g \cdot t_{fall}}{v_0}\right) = \arctan\left(\frac{g \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}}}{v_0}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{2 \cdot H \cdot g}}{v_0}\right)$$

Lösung zu c)

Konkrete Werte:

Bahnkurve: $y(x) = 30\,m - 0{,}012\frac{1}{m}\cdot x^2$; Tangente: $f(x) = -1{,}213\,(x - 49{,}5\,m)$

Wurfweite: $x_W = 49{,}5\,m$; Auftreffwinkel: $\alpha = 129{,}5°$



Aufgabe 2

Gegeben sind die Bewegungsgleichungen x(t) und y(t) für den Massenschwerpunkt eines Körpers, der im Koordinatenursprung mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter dem Abwurfwinkel α unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes weggeworfen wird:

(1) $x(t) = \cos(\alpha)\cdot v_0\cdot t \quad \wedge \quad$ (2) $y(t) = \sin(\alpha)\cdot v_0\cdot t - \frac{1}{2}g\cdot t^2$.

a) Bestimmen Sie die Bahnkurve y(x) mit allgemeinen Größen.

b) Bestimmen Sie die höchsten Punkt der Bahnkurve mithilfe der Differentialrechnung.

c) Erstellen Sie eine Zeichnung der Bahnkurve mit Tangente an der Abwurfstelle für

$\alpha = 60°$; $v_0 = 20\frac{m}{s}$; $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$;

Lösung zu a)

Aus (1) $t = \frac{x}{\cos(\alpha)\cdot{}_0}$

In (2) $y(x) = \sin(\alpha)\cdot v_0\cdot\frac{x}{\cos(\alpha)\cdot v_0} - \frac{1}{2}g\cdot\left(\frac{x}{\cos(\alpha)\cdot v_0}\right)^2$

Bahnkurve: $y(x) = \tan(\alpha)\cdot x - \frac{g}{2\cdot v_0^{\,2}\cdot(\cos(\alpha))^2}\cdot x^2$

Lösung zu b)

$$y'(x) = \tan(\alpha) - \frac{g}{{v_0}^2 \cdot (\cos(\alpha))^2} \cdot x$$

Horizontale Tangenten: $y'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan(\alpha) - \frac{g}{{v_0}^2 \cdot (\cos(\alpha))^2} \cdot x = 0$

Auflösen: $x_{hor} = \frac{{v_0}^2}{g} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$

Einsetzen: $y(x_{hor}) = \tan(\alpha) \cdot \frac{{v_0}^2}{g} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \frac{g}{2 \cdot {v_0}^2 \cdot (\cos(\alpha))^2} \cdot \left(\frac{{v_0}^2}{g} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right)^2$

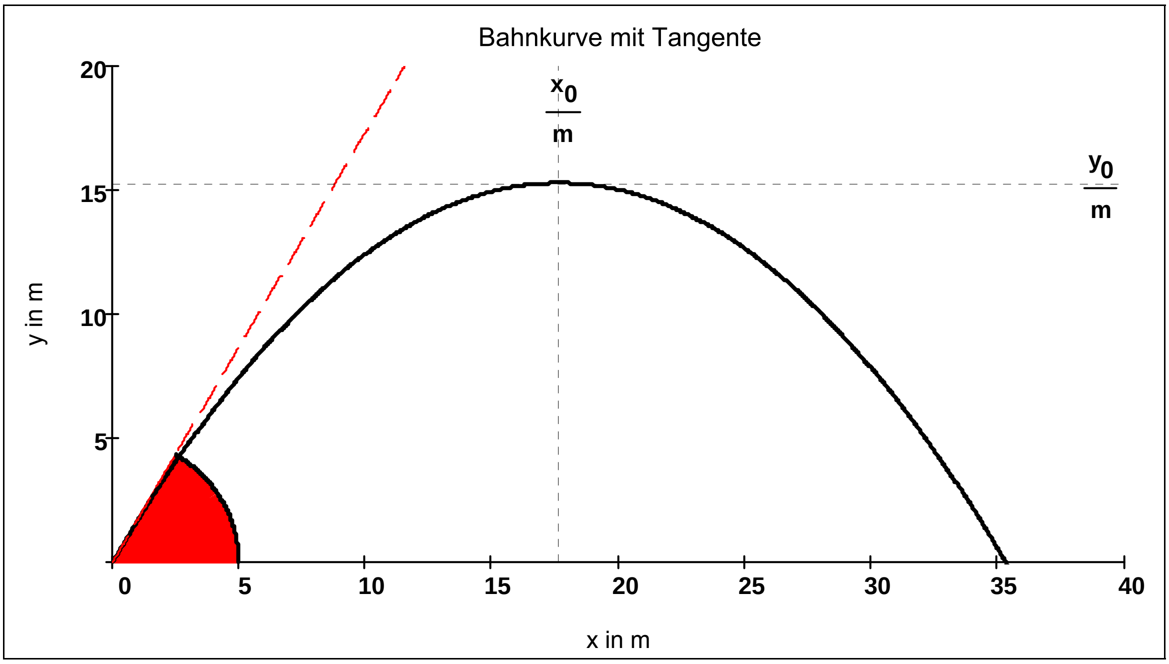
Vereinfachen: $y(x_{hor}) = \frac{{v_0}^2}{g} \cdot (\sin(\alpha))^2 - \frac{{v_0}^2}{2 \cdot g} \cdot (\sin(\alpha))^2 = \frac{{v_0}^2}{2 \cdot g} \cdot (\sin(\alpha))^2$

Lösung zu c)

Konkrete Werte:

Bahnkurve: $y(x) = \sqrt{3}\, x - 0{,}049 \frac{1}{m} \cdot x^2$; Tangente: $f(x) = \sqrt{3}\, x$

Extremstelle: $x_0 = 17{,}7\,m$; Maximale Steighöhe: $y_0 = 15{,}3\,m$



5 Numerisches Bestimmen der Nullstellen von Funktionen

Das ***Newtonsche Näherungsverfahren*** (benannt nach Sir Isaac Newton, 1169) ist in der Mathematik das Standardverfahren zur numerischen Lösung von nichtlinearen Gleichungen. Bei Gleichungen mit einer Variablen lassen sich zu einer gegebenen stetig differenzierbaren Funktion f Näherungswerte für Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$ finden.

Die grundlegende Idee dieses Verfahrens ist, die Funktion in einem Ausgangspunkt zu ***linearisieren***, d. h. ihre Tangente zu bestimmen, und die Nullstelle der Tangente als verbesserte Näherung der Nullstelle der Funktion zu verwenden. Die erhaltene Näherung dient im Allgemeinen als Ausgangspunkt für einen weiteren Verbesserungsschritt.

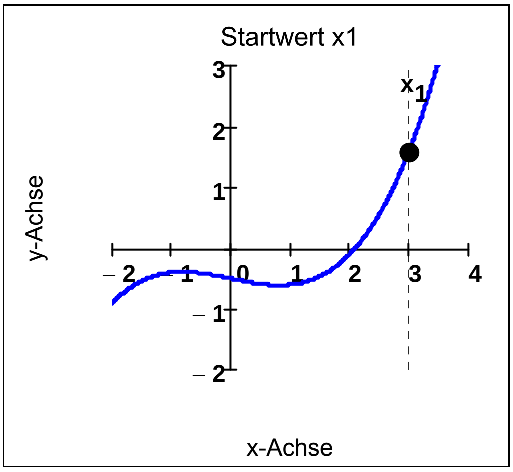
Gegeben ist ein Funktionsterm f(x) und die 1. Ableitung f'(x).

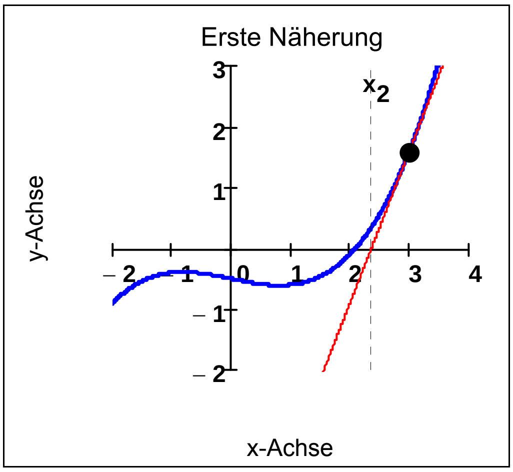
Wählen Sie den Startwert x_1:

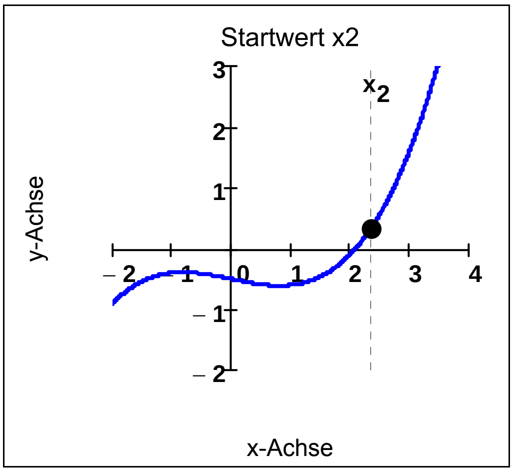
Tangente an der Stelle x_1: $t(x) = f'(x_1) \cdot (x - x_1) + f(x_1)$

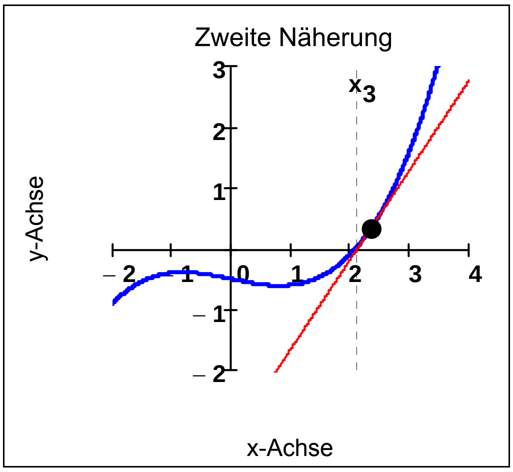
Nullstellenbedingung: $t(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_1) \cdot (x - x_1) + f(x_1) = 0$

Nullstelle der Tangente: $x_2 = \dfrac{x_1 \cdot f'(x_1) - f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$









Führt man diese Näherungen mehrmals durch, ergibt sich eine

rekursive Näherungsformel: $\boxed{x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$ vgl. Merkhilfe Seite 6

Bemerkungen

Das Newtonverfahren führt zu einem Grenzwert, wenn gilt: $\left| \dfrac{f(x_0) \cdot f''(x_0)}{(f'(x_0))^2} \right| < 1$

Das Verfahren kann immer dann angewendet werden, wenn der Nenner der Rekursionsformel ungleich Null ist, also keine horizontalen Tangenten vorliegen.
Es versagt, wenn die Tangente an den Graphen der Funktion in der Nähe der Nullstelle nahezu parallel zur x-Achse verläuft oder wenn in der Nähe eine Extremstelle oder Wendestelle mit nahezu horizontaler Tangente vorliegt.
Die gesuchte Nullstelle und der Startwert dürfen nicht zu weit voneinander entfernt sein.

Beispiel

Gegeben ist der Funktionsterm $f(x) = 0{,}1 \cdot \left(x^3 - 2x - 5\right)$ mit $x \in IR$.

a) Zeigen Sie, dass im Intervall $]2;\, 3[$ eine Nullstelle liegen muss.

b) Zeigen Sie, dass im Intervall genau eine Nullstelle liegt.

c) Bestimmen Sie, ausgehend vom Startwert $x_1 = 3$, in drei Näherungsschritten die Nullstelle der Funktion f nach der Newtonschen Iterationsformel.

Lösung zu a)

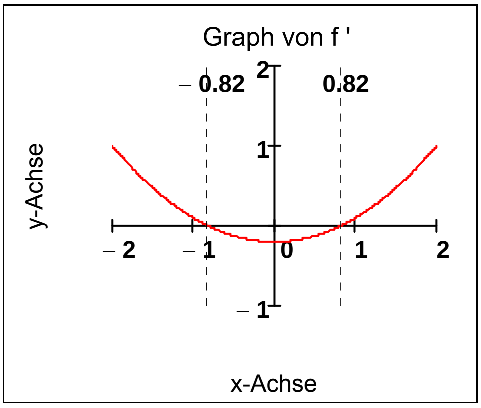
Mithilfe einer Wertetabelle findet man: $f(2) = -0{,}1$; $f(3) = 1{,}6$;

Das heißt, im Intervall im $]2;\, 3[$ findet ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte statt.

Nach dem Nullstellensatz hat die Funktion f in diesem Intervall **mindestens** eine Nullstelle.

Lösung zu b)

Ableitungsfunktion: $f'(x) = 0{,}1 \cdot \left(3x^2 - 2\right)$



Horizontale Tangenten:

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = \dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow\; x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}} \approx \pm\, 0{,}82$

Vorzeichen von f'(x): $f'(x) > 0$ für $x > \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$\Rightarrow$ G_f streng monoton steigend für $x > 2$

G_f besitzt im Intervall $]2;\, 3[$ **genau eine** Nullstelle.

Lösung zu c)

Startwert: $x_1 = 3$

$$x_2 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{1{,}6}{2{,}5} = 2{,}36$$

$$x_3 = 2{,}36 - \frac{f(2{,}36)}{f'(2{,}36)} = 2{,}36 - \frac{0{,}342426}{1{,}47088} = 2{,}12720$$

$$x_4 = 2{,}12720 - \frac{f(2{,}12720)}{f'(2{,}12720)} = 2{,}12720 - \frac{0{,}037114}{1{,}15749} = 2{,}09514$$