Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2011
Mathematik 12 Technik - A II - Lösung

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

Gegeben sind die reellen Funktionen $f(x) := \dfrac{3 + e^{2\cdot x}}{1 + e^{2\cdot x}}$ mit $x \in IR$.

Teilaufgabe 1.1 **(5 BE)**
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $|x| \to \infty$ und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3 + e^{2\cdot x}}{1 + e^{2\cdot x}} \to 3 \qquad (e^{2\cdot x} \to 0)$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3 + e^{2\cdot x}}{1 + e^{2\cdot x}} \overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2\cdot e^{2\cdot x}}{2\cdot e^{2\cdot x}} = 1 \qquad (e^{2\cdot x} \to \infty)$$

Horizontale Asymptoten: A_1: $y = 3$ A_2: $y = 1$

Teilaufgabe 1.2 **(3 BE)**
Zeigen Sie, dass die Funktion f keine Nullstellen und ihr Graph keine Extrempunkte besitzt.

[Teilergebnis: $f'(x) := \dfrac{-4\cdot e^{2\cdot x}}{\left(1 + e^{2\cdot x}\right)^2}$]

$f(x) = 0$ $3 + e^{2\cdot x} \neq 0$ $\Rightarrow$ keine Nullstellen

$$f'(x) = \frac{\left(1 + e^{2\cdot x}\right)\cdot 2\cdot e^{2\cdot x} - \left(3 + e^{2\cdot x}\right)\cdot 2\cdot e^{2\cdot x}}{\left(1 + e^{2\cdot x}\right)^2} = \frac{2\cdot e^{2\cdot x}\cdot\left(1 + e^{2\cdot x} - 3 - e^{2\cdot x}\right)}{\left(1 + e^{2\cdot x}\right)^2} = \frac{-4\cdot e^{2\cdot x}}{\left(1 + e^{2\cdot x}\right)^2}$$

$f'(x) = 0$ $-4\cdot e^{2\cdot x} \neq 0$ $\Rightarrow$ keine Extrempunkte

Teilaufgabe 1.3 **(9 BE)**
Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f, ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes W und stellen Sie die Gleichung der Tangente w an den Graphen von f im Wendepunkt W auf.
[Teilergebnis: **W(0/2)**]

$$f''(x) = \frac{\left(1 + e^{2\cdot x}\right)^2\cdot\left(-8\cdot e^{2\cdot x}\right) - \left(-4\cdot e^{2\cdot x}\right)\cdot 2\cdot\left(1 + e^{2\cdot x}\right)\cdot e^{2\cdot x}\cdot 2}{\left(1 + e^{2\cdot x}\right)^4}$$

$$f''(x) = \frac{\left(1+e^{2\cdot x}\right)\cdot 8\cdot e^{2\cdot x}\cdot\left[-\left(1+e^{2\cdot x}\right)+2\cdot e^{2\cdot x}\right]}{\left(1+e^{2\cdot x}\right)^4} = \frac{8\cdot e^{2\cdot x}\cdot\left(e^{2\cdot x}-1\right)}{\left(1+e^{2\cdot x}\right)^3}$$

Flachpunkte: $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2\cdot x} \neq 0 \quad e^{2\cdot x} - 1 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 0$

$e^{2\cdot x} - 1 > 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 0 < x \quad \Rightarrow$ G_f ist linksgekrümmt für $x \in [\,0\,;\,\infty\,[$

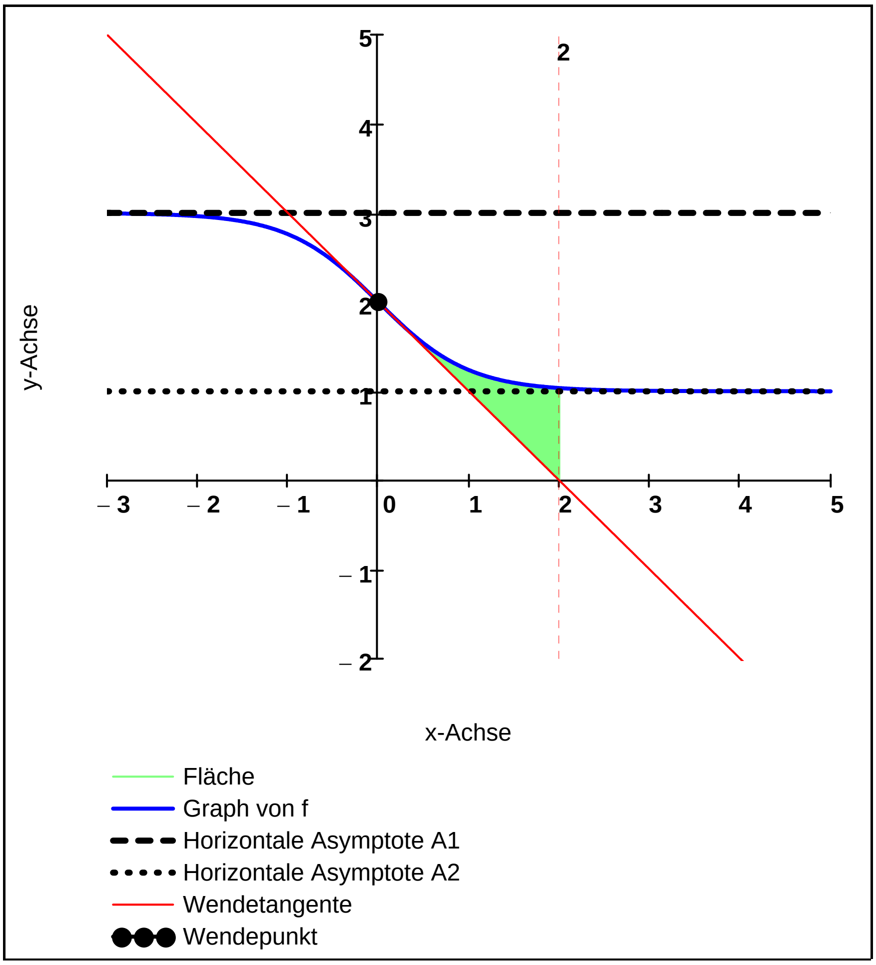
$e^{2\cdot x} - 1 < 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow x < 0 \quad \Rightarrow$ G_f ist rechtsgekrümmt für $x \in]\,-\infty\,;\,0\,]$

Funktionswert: $f(0) = 2$ Wendepunkt: W(0/2)

Steigung der Wendetangente: $f'(0) = -1$

Wendetangente: $w(x) := f'(0)\cdot x + f(0)$ $\boxed{w(x) = 2 - x}$

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)
Zeichnen Sie den Graphen von f mit der Tangente w für $-3 \le x \le 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab **1 LE = 1 cm**.



Teilaufgabe 1.5 (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x) = 3 \cdot x - \ln\left(1 + e^{2 \cdot x}\right)$, $x \in IR$, eine Stammfunktion der Funktion f ist.

$$F'(x) = 3 - \frac{2 \cdot e^{2 \cdot x}}{1 + e^{2 \cdot x}} = \frac{3 \cdot \left(1 + e^{2 \cdot x}\right) - 2 \cdot e^{2 \cdot x}}{1 + e^{2 \cdot x}} = \frac{3 + e^{2 \cdot x}}{1 + e^{2 \cdot x}} = f(x) \qquad \text{und} \quad D_F = D_f$$

Teilaufgabe 1.6.0

Der Graph von f, die Tangente w und die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $u \in IR$ und $u \geq 2$ schließen ein Flächenstück A_u ein.

Teilaufgabe 1.6.1 (4 BE)

Kennzeichnen Sie für $u = 2$ das Flächenstück A_2 im Schaubild der Aufgabe 1.4 und berechnen Sie seine Flächenmaßzahl A.
[Teilergebnis: $A \approx 0.675$]

$$A_{21} = \int_0^2 f(x)\, dx = F(2) - F(0) = \left(3 \cdot 2 - \ln\left(1 + e^{2 \cdot 2}\right)\right) - \left(3 \cdot 0 - \ln\left(1 + e^{2 \cdot 0}\right)\right)$$

Teilfläche 1: $A_{21} := \ln(2) - \ln\left(e^4 + 1\right) + 6 \qquad A_{21} = 2.675$

Teilfläche 2: $A_{22} := \int_0^2 w(x)\, dx \qquad A_{22} = 2$

Gesamtfläche: $A_2 := A_{21} - A_{22} \qquad A_2 = 0.675$

Teilaufgabe 1.6.2 (6 BE)

Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren u näherungsweise so, dass das Flächenstück A_u gleich große Flächenanteile oberhalb und unterhalb der x-Achse besitzt.
Benutzen Sie $u_0 = 4$ als Startwert und führen Sie einen Näherungsschritt durch.

Fläche oberhalb der x-Achse:

$$A_o(u) := A_2 + \int_2^u f(x)\, dx \qquad A_o(u) = 3 \cdot u + \ln(2) - \ln\left(e^{2 \cdot u} + 1\right) - 2$$

Fläche unterhalb der x-Achse:

$$A_u(u) := -\int_2^u w(x)\, dx \qquad A_u(u) = \frac{(u-2)^2}{2}$$

Bedingung: $A_o = A_u \quad \Leftrightarrow \quad A_o - A_u = 0$

$$J(u) := A_o(u) - A_u(u) \qquad J(u) = 3 \cdot u + \ln(2) - \ln\left(e^{2 \cdot u} + 1\right) - \frac{(u-2)^2}{2} - 2$$

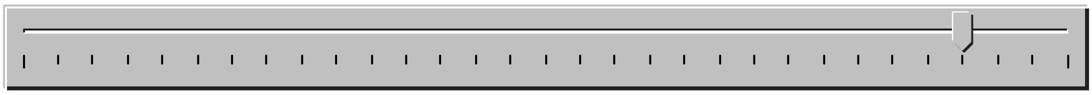
Ableitungsfunktion: $$J'(u) := \frac{d}{du} J(u) = 5 - \frac{2 \cdot e^{2 \cdot u}}{e^{2 \cdot u} + 1} - u$$

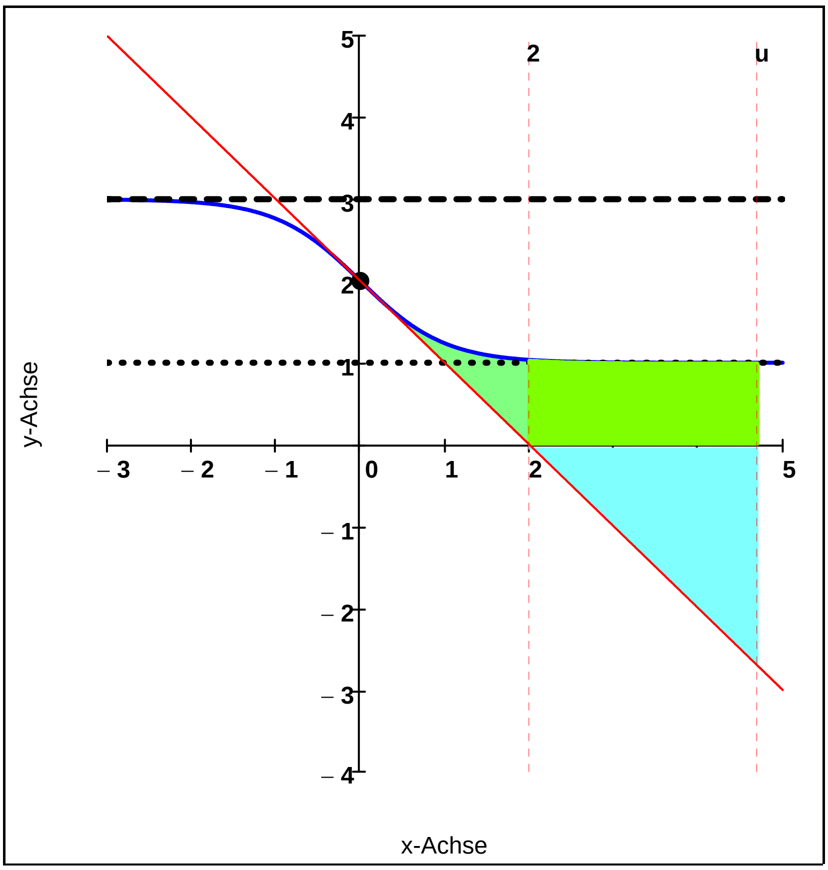
Newton-Verfahren:

Startwert: $u_0 := 4$

1. Näherung: $$u_1 := u_0 - \frac{J(u_0)}{J'(u_0)} \qquad u_1 = 4.693$$

weitere Näherungen





$u = 4.700$

$A_o(u) = 3.393$

$A_u(u) = 3.645$

Mit Wert aus der dritten Näherung:

$A_o(u_3) = 3.238$

$A_u(u_3) = 3.238$

Teilaufgabe 2.0
Gegeben ist ferner in der maximalen Definitionsmenge D_g eine Funktion $g(x) = a \cdot \ln(b \cdot x + c) + 2$, bei der die reellen, von Null verschiedenen Koeffizienten a, b und c dadurch festgelegt sind, dass der Graph dieser Funktion durch den Punkt P(0/2) verläuft, dort die Steigung 1 und an der Stelle $x_0 = -1$ die Steigung 3 besitzt.

Teilaufgabe 2.1 **(6 BE)**
Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.
[Ergebnis: $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = 1$]

$$g(x, a, b, c) := a \cdot \ln(b \cdot x + c) + 2 \qquad g'(x, a, b, c) := a \cdot b \cdot \frac{1}{b \cdot x + c}$$

Bedingungen einsetzen und Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} g(0, a, b, c) = 2 \\ g'(0, a, b, c) = 1 \\ g'(-1, a, b, c) = 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \cdot \ln(c) + 2 = 2 \\ \frac{a \cdot b}{c} = 1 \\ -\frac{a \cdot b}{b - c} = 3 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, a, b, c \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$a_1 = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $b_1 = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $c_1 = 1$

Teilaufgabe 2.2 **(2 BE)**
Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_g.

Konkreter Funktionsterm: $g(x) := \frac{3}{2} \cdot \ln\left(\frac{2}{3} \cdot x + 1\right) + 2$

Argument positiv: $\frac{2}{3} \cdot x + 1 > 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow -\frac{3}{2} < x$ $\qquad$ $D_g = \left] -\frac{3}{2} ; \infty \right[$

Teilaufgabe 2.3 **(3 BE)**
Zeigen Sie, dass die Funktion g streng monoton ist.

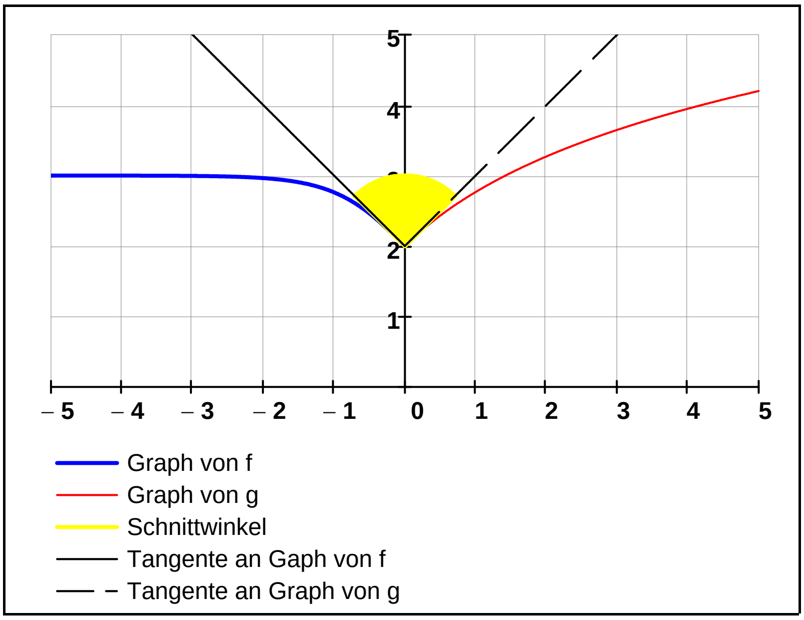
$$g'(x) := \frac{d}{dx} g(x) = \frac{1}{\frac{2 \cdot x}{3} + 1}$$

$\frac{1}{\frac{2 \cdot x}{3} + 1} > 0$ in D_g $\quad \Rightarrow \quad$ G_g streng monoton steigend in D_g

Teilaufgabe 2.4 (8 BE)
Untersuchen Sie, ob die Funktion h mit

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x < 0 \quad \text{(Aufg. 1.0)} \\ g(x) & \text{if } x \ge 0 \quad \text{(Aufg. 2.0)} \end{cases}$$

an der Nahtstelle $x = 0$ stetig ist, begründen Sie, dass die Funktionswerte von h an der Nahtstelle ein Minimum aufweisen, und geben Sie den Winkel an, unter dem die Graphen der beiden Teilfunktionen an der Nahtstelle aufeinanderetreffen.



Stetigkeit:

Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{3 + e^{2 \cdot x}}{1 + e^{2 \cdot x}} \right) \rightarrow 2$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{3}{2} \cdot \ln\left(\dfrac{2}{3} \cdot x + 1 \right) + 2 \right) \rightarrow 2$

Funktionswert: $g(0) = 2$

Steigung:

Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 0^-} \left[\dfrac{-4 \cdot e^{2 \cdot x}}{\left(1 + e^{2 \cdot x}\right)^2} \right] \rightarrow -1$ $\qquad m_f := -1$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{\dfrac{2 \cdot x}{3} + 1} \right) \rightarrow 1$ $\qquad m_g := 1$

G_h ist streng monoton fallend für $]-\infty\,;\,0]$ und G_h ist streng monoton steigend für $[\,0\,;\,\infty\,[$

$\Rightarrow \quad x = 0$ ist ein lokales Minimum

Es gilt: $m_f \cdot m_g = -1$ $\quad \Rightarrow \quad$ Schnittwinkel $\alpha := 90°$

Teilaufgabe 3.0
Mit Hilfe einer Kovexlinse (Sammellinse) wird von einem selbstleuchtenden, links von der Linse stehenden Gegenstand auf einem Schirm rechts von der Linse ein reales, scharfes Bild erzeugt. Der Abstand des Gegenstandes von der Linsenmitte heißt dabei Gegenstandsweite g, der Abstand des Schirms von der Linsenmitte heißt Bildweite b.

Der Zusammenhang zwischen diesen Größen ist durch die Linsenformel $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ gegeben, wobei mit f die Brennweite der Linse bezeichnet wird. Um ein reales Bild zu erzeugen, muss die Gegenstandsweite größer als die Brennweite sein.
Dieser Versuchsaufbau soll in einem Schaukasten einer Schule gezeigt werden. Die Brennweite der verwendeten Linse beträgt $f = 50 \cdot mm$.
Die Einheit kann für die Berechnungen weggelassen werden.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)
Zeigen Sie, dass für den gesamten Platzbedarf $a = g + b$ in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite g folgender funktionaler Zusammenhang bersteht:

$$a(g) = \frac{g^2}{g - 50}$$

Platzbedarf: $a(g, b) = g + b$

Linsenformel: $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ bzw. $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{50}$ auflösen, b $\rightarrow -\frac{1}{\frac{1}{g} - \frac{1}{50}}$

Nebenbedingung: $b(g) := \frac{50 \cdot g}{g - 50}$

Einsetzen in Zielfunktion: $a(g) = g + \frac{50 \cdot g}{g - 50} = \frac{g \cdot (g - 50) + 50 \cdot g}{g - 50} = \frac{g^2}{g - 50}$

Also: $a(g) := \frac{g^2}{g - 50}$

Teilaufgabe 3.2 (4 BE)
Bestimmen Sie eine geeignete Definitionsmenge D_a, wenn der Platzbedarf a durch die Länge des Schaukastens mit **3000 mm** begrenzt ist.

$$\frac{g^2}{g - 50} = 3000 \text{ auflösen, g} \rightarrow \begin{pmatrix} 100 \cdot \sqrt{210} + 1500 \\ 1500 - 100 \cdot \sqrt{210} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2949 \\ 51 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad D_a =]\, 51 ; 2949 \,[$$

Teilaufgabe 3.3 **(8 BE)**
Beweisen Sie, dass es eine Gegenstandsweite g_0 gibt, für die der Platzbedarf a minimal wird, berechnen Sie g_0 sowie den minimalen Platzbedarf $a(g_0)$ und ermitteln Sie, welcher besondere Zusammenhang zwischen g_0 und der zugehörigen Bildweite b_0 besteht.

Ableitungsfunktion: $a'(g) := \frac{d}{dg}a(g) = \frac{g\cdot(g-100)}{(g-50)^2}$

Horizontale Tangenten: $a'(g) = 0 \rightarrow \frac{g\cdot(g-100)}{(g-50)^2} = 0$ auflösen, $g \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix}$ nicht definiert

Extremum: $g_E := 100$

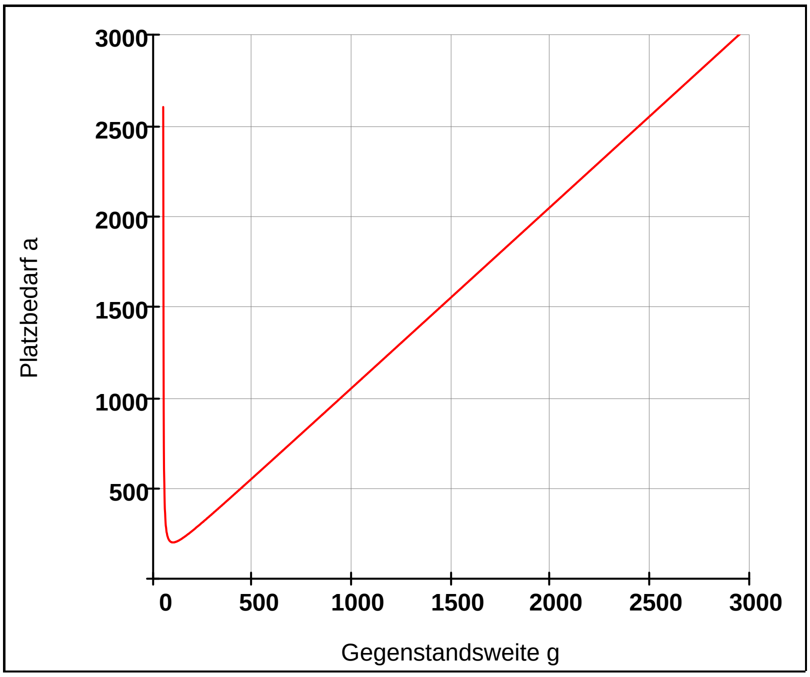
Funktionswert: $a(g_E) = 200$

Vergleich mit den Randwerten:

$\lim_{g \rightarrow 51^+} a(g) \rightarrow 2601$ $\lim_{g \rightarrow 2949^-} a(g) \rightarrow \frac{8696601}{2899} = 3000$

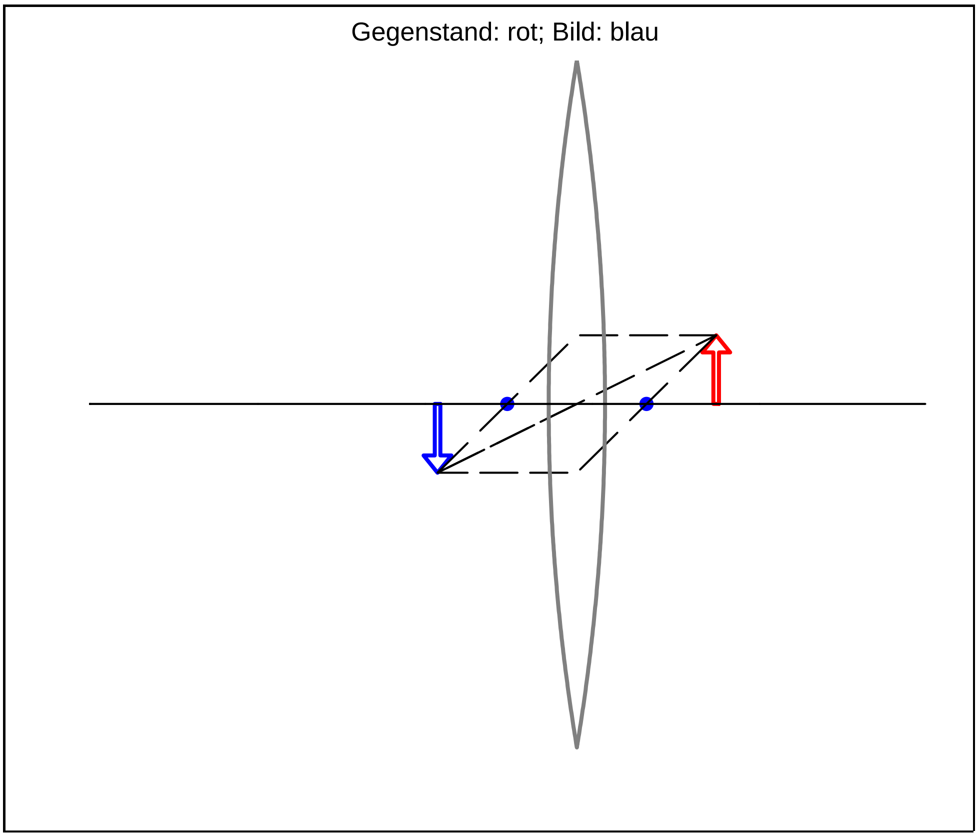
g_E ist absolutes Minimum

Bildweite: $b(100) = 100$ $\Rightarrow$ Bildweite = Gegenstandsweite, die Linse steht also in der Mitte



Wählen Sie die Gegenstandsweite g:

Programmierung



Gegen-
stands-
weite in
mm:

$g = 100$

$$\textbf{Abbildung} = \left(\begin{array}{c} \text{"g > f"} \\ \text{"Gegenstand u. Bild auf versch. Seiten der Linse"} \\ \text{"reelles Bild"} \\ \text{"Bild umgekehrt"} \\ \text{"g = 2.f"} \\ \text{"Gegenstand u. Bild gleich groß"} \end{array}\right)$$