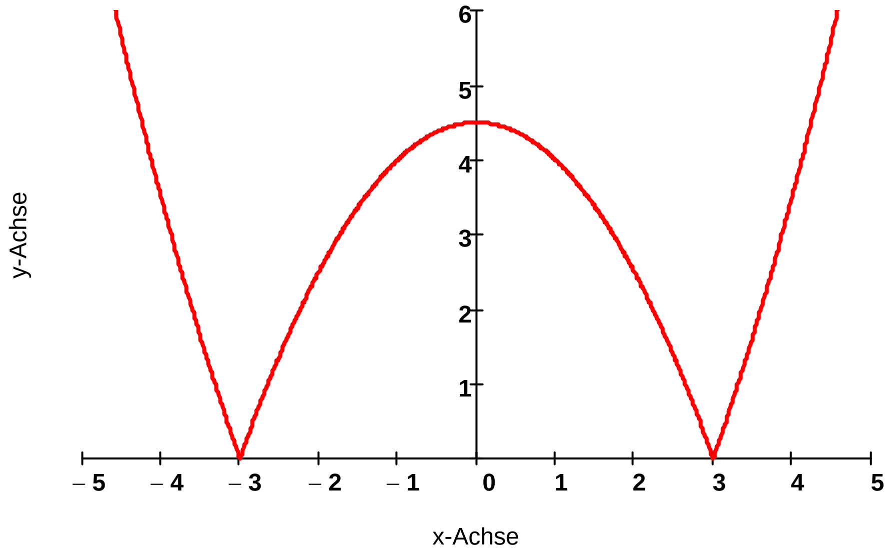
mathphys-online

Abschnittsweise definierte Funktionen

Stetigkeit und Differenzierbarkeit



Inhaltsverzeichnis

Graphiken erstellt mit Mathcad 15

Abschnittsweise definierte Funktionen

1 Betragsfunktionen

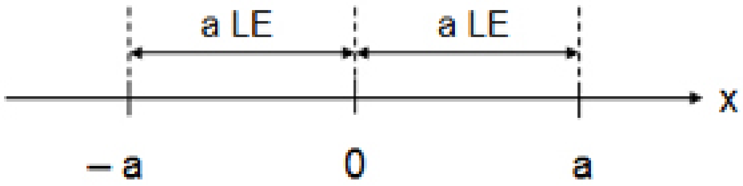
1.1 Der absolute Betrag einer Zahl

Definition

Der ***absolute Betrag*** einer Zahl a ist folgendermaßen definiert:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für} \quad a > 0 \\ 0 & \text{für} \quad a = 0 \\ -a & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}$$

Geometrisch bedeutet dies den Abstand einer Zahl a auf der x-Achse vom Koordinatenursprung.

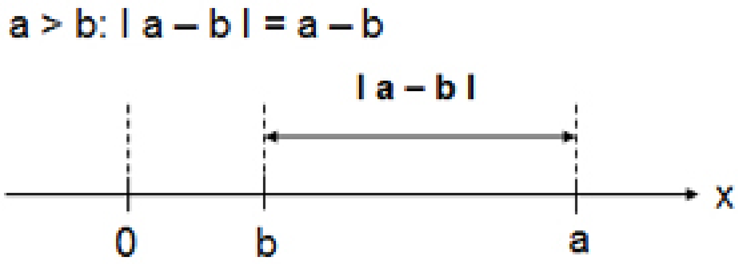


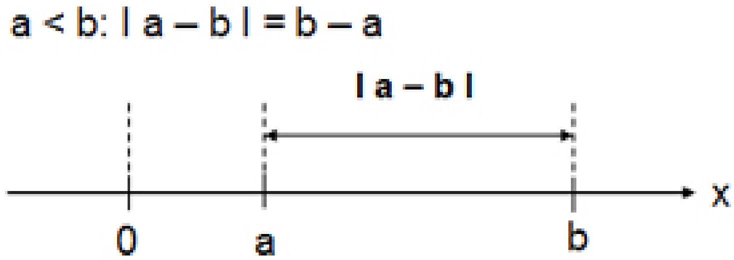
Beispiel: $|3| = 3$; $|-3| = 3$

Abstand d zwischen zwei Zahlen a und b

$$|a-b| = \begin{cases} a-b & \text{für} \quad a > b \\ 0 & \text{für} \quad a = b \\ -(a-b) & \text{für} \quad a < b \end{cases}$$

Geometrische Interpretation





Beispiel

$$|a-3| = \begin{cases} a-3 & \text{für} \quad a>3 \\ 0 & \text{für} \quad a=3 \\ -(a-3) & \text{für} \quad a<3 \end{cases}$$

1.2 Die einfache Betragsfunktion

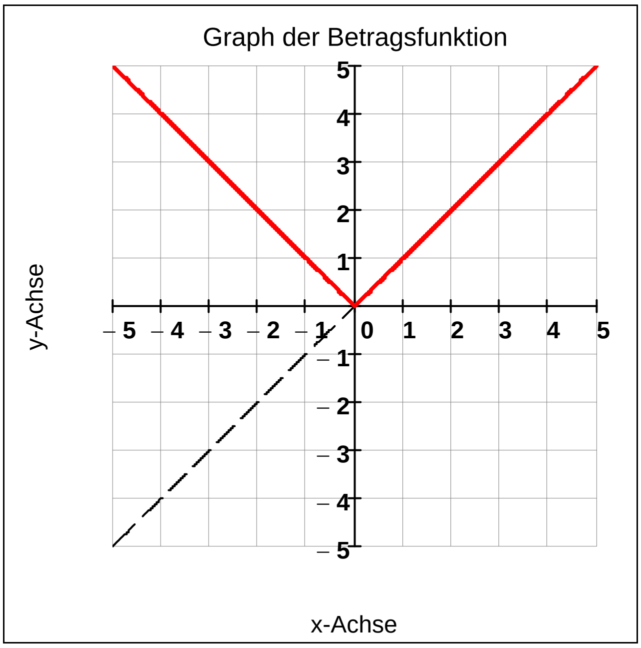
Definition

Die Funktion $f: x \mapsto |x|$ mit $x \in IR$ heißt ***Betragsfunktion***.

In vielen Anwendungen wird die *betragsfreie Darstellung* des Funktionsterms f verwendet und es gilt mit geteilter Definitionsmenge:

$$\boxed{f(x) = |x| \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x>0 \\ 0 & \text{für} \quad x=0 \\ -x & \text{für} \quad x<0 \end{cases}}$$

Graphische Darstellung



Anschaulich bedeutet dies, dass der negative Teil der Argumentfunktion y = x (gestrichelt) an der x-Achse gespiegelt wird.

1.3 Zusammengesetzte lineare Betragsfunktionen

Bei zusammengesetzten Betragsfunktionen wird eine Fallunterscheidung für jeden einzelnen Betragsterm nötig. Da jeder Term für sich positiv oder negativ sein kann, müssen alle möglichen Vorzeichenkombinationen untersucht werden.

Beispiel

$f(x) = |x+1| + |3-x|$

1. Fall: $x+1>0 \wedge 3-x>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>-1 \wedge x<3 \quad \Leftrightarrow \quad -1<x<3$
   $\Rightarrow \quad f_1(x) = x+1+3-x = 4$

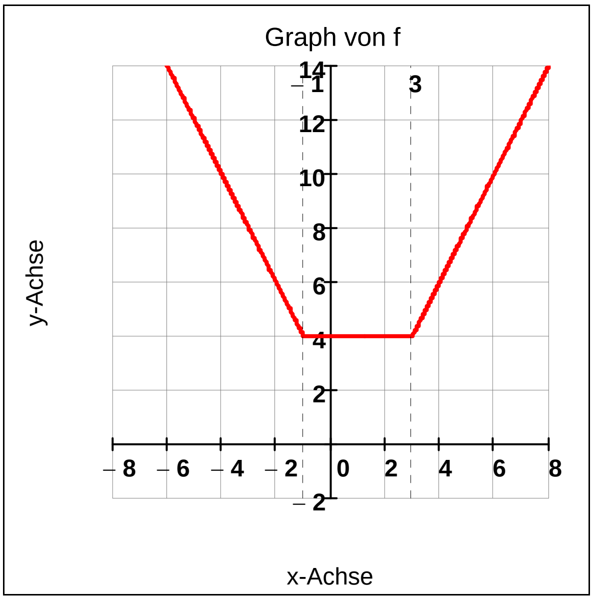
2. Fall: $x+1<0 \wedge 3-x<0 \quad \Leftrightarrow \quad x<-1 \wedge x>3 \quad \Leftrightarrow \quad \{\ \}$ also keine Lösung

3. Fall: $x+1>0 \wedge 3-x<0 \quad \Leftrightarrow \quad x>-1 \wedge x>3 \quad \Leftrightarrow \quad x>3$
   $\Rightarrow \quad f_2(x) = x+1-(3-x) = 2x-2$

4. Fall: $x+1<0 \wedge 3-x>0 \quad \Leftrightarrow \quad x<-1 \wedge x<3 \quad \Leftrightarrow \quad x<-1$
   $\Rightarrow \quad f_3(x) = -(x+1)+(3-x) = -2x-2$

Betragsfreie Darstellung:

$$f(x) = \begin{cases} -2x-2 & \text{für} \quad x \le -1 \\ 4 & \text{für} \quad -1 < x < 3 \\ 2x-2 & \text{für} \quad x \ge 3 \end{cases}$$



1.4 Verkettete Betragsfunktionen

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left| x^2 - 9 \right|,\ x \in \mathrm{IR}$.

Schreiben Sie den Funktionsterm betragsfrei und zeichnen Sie den Graphen von f.

Lösung

Fallunterscheidung für das Argument

1. Fall: $x^2 - 9 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > 9 \quad \Leftrightarrow \quad |x| > 3 \quad \Leftrightarrow \quad x < -3 \vee x > 3$

2. Fall: $x^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \vee x = 3$

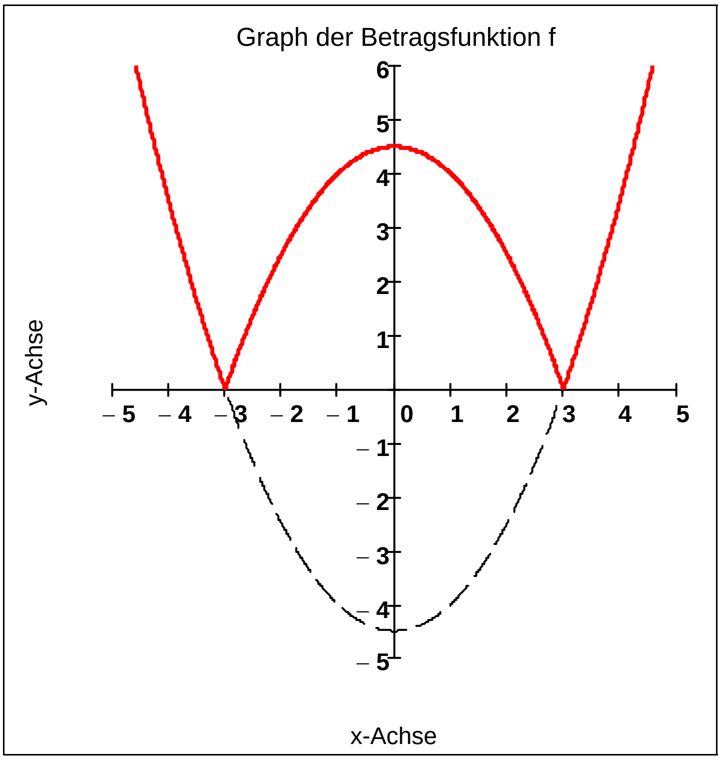
3. Fall: $x^2 - 9 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < 9 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < x < 3$

Betragsfreie Darstellung:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x^2 - 9\right) & \text{für} \quad x < -3 \vee x > 3 \\ 0 & \text{für} \quad x = -3 \vee x = 3 \\ -\frac{1}{2}\left(x^2 - 9\right) & \text{für} \quad -3 < x < 3 \end{cases}$$

Die Grenzen können jeweils zu einem der Bereiche zugeordnet werden, z. B.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x^2 - 9\right) & \text{für} \quad x < -3 \vee x > 3 \\ -\frac{1}{2}\left(x^2 - 9\right) & \text{für} \quad -3 \le x \le 3 \end{cases}$$



Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x)=\frac{1}{3}\cdot\left|-x^2+2x+8\right|,\ x\in\mathbb{R}$.

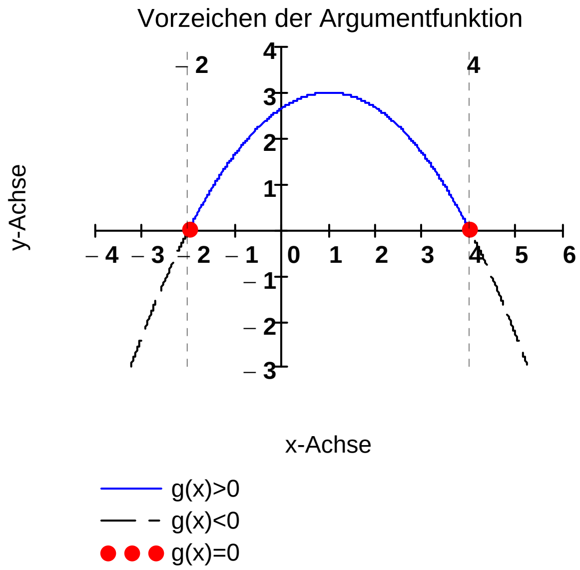
Schreiben Sie den Funktionsterm betragsfrei und zeichnen Sie den Graphen von f.

Lösung

Fallunterscheidung für das Vorzeichen des Terms innerhalb der Betragstriche:

$-x^2+2x+8>0$ bzw. $-x^2+2x+8<0$

Graphische Lösung der quadratischen Ungleichung:



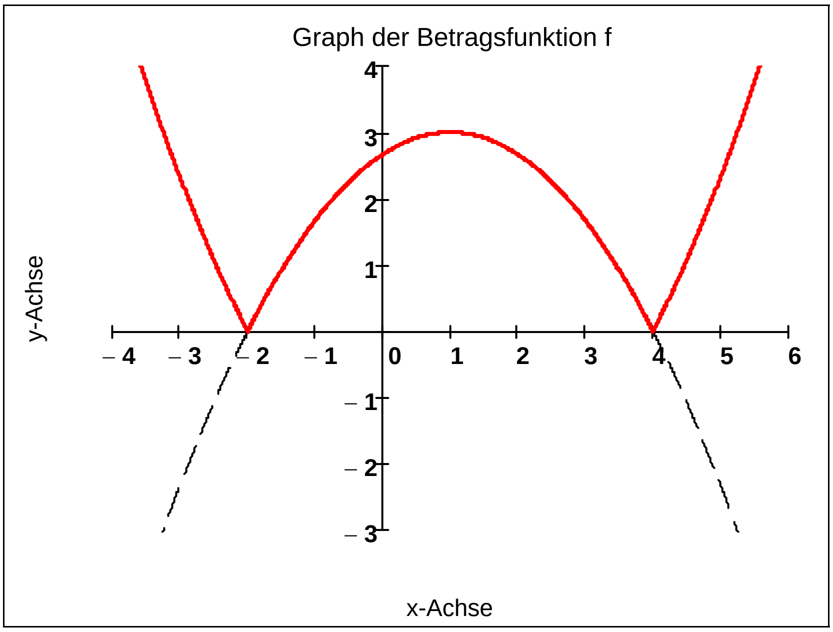
Argumentfunktion: $g(x)=-x^2+2x+8$

$$g(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+2x+8=0$$
$$\Leftrightarrow -(x+2)\cdot(x-4)=0$$
$$\Leftrightarrow x_1=-2;\ x_2=4$$

1. Fall: $g(x)<0 \Leftrightarrow x<-2 \vee x>4$

2. Fall: $g(x)>0 \Leftrightarrow -2<x<4$

Betragsfreie Darstellung: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}\left(-x^2+2x+8\right) & \text{für } -2\le x\le 4\\ -\frac{1}{3}\left(-x^2+2x+8\right) & \text{für } x<-2 \vee x>4\end{cases}$

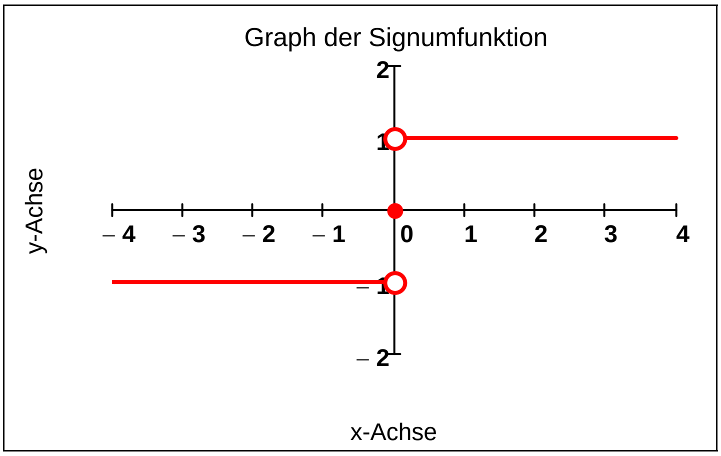


2 Die Signumfunktion (Vorzeichenfunktion)

Definition

Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \quad \text{mit } x \in \mathbb{R} \\ -1 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$



Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = \operatorname{sgn}\left[\frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + x - 6\right)\right]$ und $x \in \mathbb{R}$.

Schreiben Sie die Signumfunktion f als abschnittsweise definierte Funktion und zeichnen Sie den Graphen von f.

Lösung

Argumentfunktion:

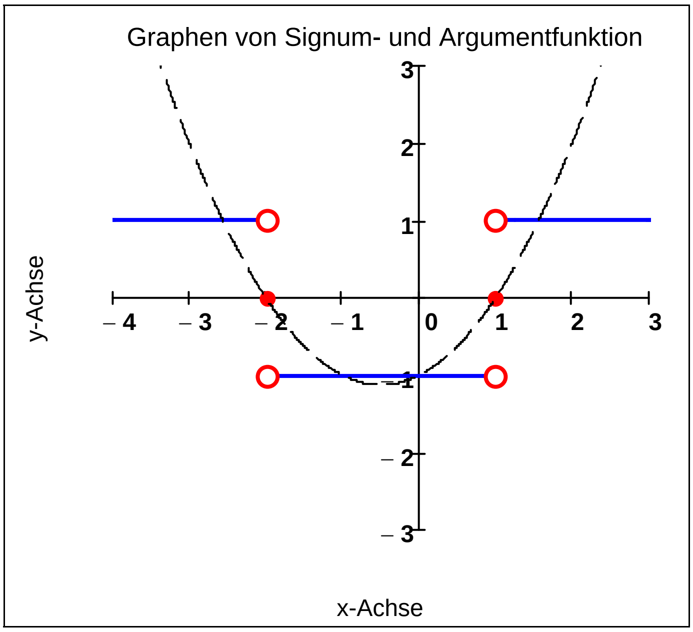
$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + x - 6\right)$$

Nullstellen:

$$g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+3) \cdot (x-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x_1 = -3;\ x_2 = 2$$

Abschnittsweise Darstellung:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x < -3 \vee x > 2 \\ 0 & \text{für} \quad x = -3 \vee x = 2 \\ -1 & \text{für} \quad -3 < x < 2 \end{cases}$$

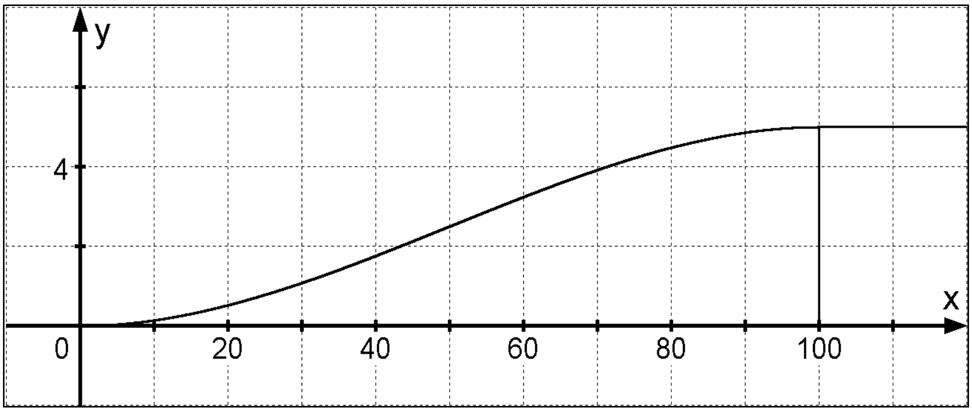


3 Beliebige Funktionen mit geteiltem Definitionsbereich

3.1 Einführendes Beispiel

Funktionen mit geteilter Definitionsmenge heißen ***abschnittsweise definierte Funktionen***.

Aufgabe: (AP 2001 / A I, Teilaufgabe 3)
Zu einer 5 m hohen Brücke soll auf einer Länge von 100 m eine Straßenauffahrt gebaut werden. Im Folgenden werden nur die Maßzahlen der Längen betrachtet.



In dem im Bild dargestellten Koordinatensystem kann das Profil der Straße bei geeigneter Wahl der reellen Parameter a, b und c modellhaft durch folgende reelle Funktion f beschrieben werden:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x & \text{für} \quad 0 \le x \le 100 \\ 5 & \text{für} \quad x > 100 \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Werte für a, b und c so, dass der Straßenverlauf an den Übergangsstellen dem Bild entspricht, d.h. weder **Lücken noch Kanten** aufweist.

Lösung

Ableitungsfunktion: $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c & \text{für} \quad 0 < x < 100 \\ 0 & \text{für} \quad x > 100 \end{cases}$

Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems:

$f(100) = 5:$	$10^6\,a + 10^4\,b + 10^2\,c = 5$	(1)
$f'(0) = 0:$	$c = 0$	(2)
$f'(100) = 0:$	$3 \cdot 10^4\,a + 2 \cdot 10^2\,b + c = 0$	(3)
c in (1)	$10^6\,a + 10^4\,b = 5$	(4)
c in (3)	$3 \cdot 10^4\,a + 2 \cdot 10^2\,b = 0$	(5)

$2 \cdot (4) - 10^2 \cdot (5) \qquad -10^6\,a = 10 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{10^5} = -\frac{1}{100000}$

A in (4) $\qquad 10^6\left(-\frac{1}{10^5}\right) + 10^4\,b = 5 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{5+10}{10^4} = \frac{15}{10000} = \frac{3}{2000}$

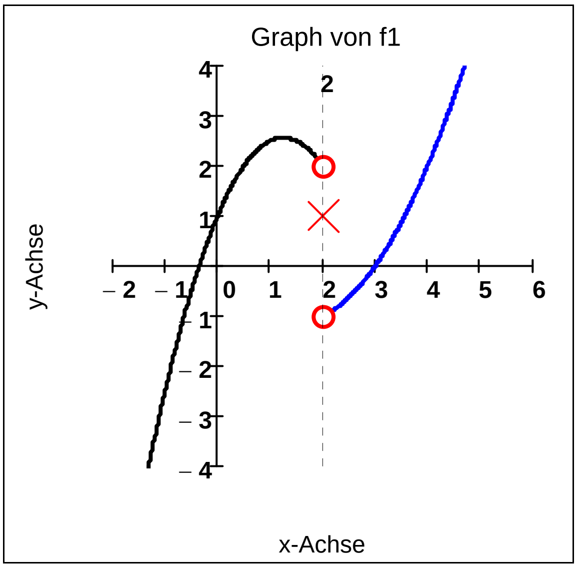
$\Rightarrow$ Funktionsterm: $f_2(x) = -\frac{1}{100000}x^3 + \frac{3}{2000}x^2$

3.2 Verhalten an der Nahtstelle bei abschnittsweise definierten Funktionen

Beispiel 1

$$f_1(x)=\begin{cases}-x^2+\frac{5}{2}\cdot x+1 & \text{für} \quad x<2\\ 1 & \text{für} \quad x=2\\ \frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x & \text{für} \quad x>2\end{cases}$$

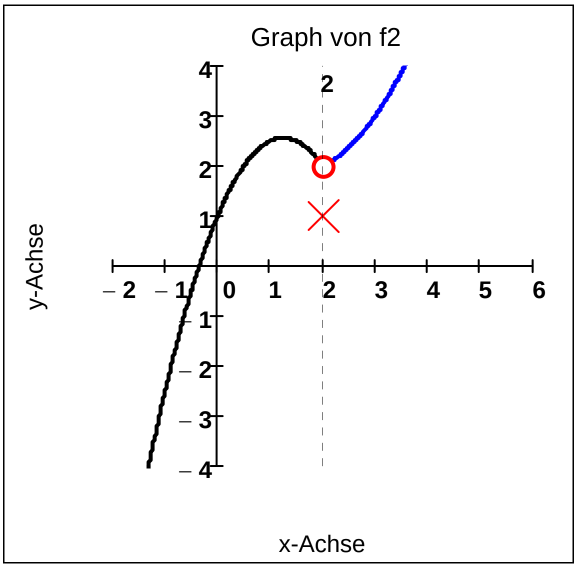
Der Graph von f_1 hat an der Stelle $x_0 = 2$ bei linksseitiger und rechtsseitiger Annäherung verschiedene Grenzwerte. Man sagt, der Graph von f_1 hat an der Stelle $x_0 = 2$ einen ***Sprung***.



Beispiel 2

$$f_2(x)=\begin{cases}-x^2+\frac{5}{2}\cdot x+1 & \text{für} \quad x<2\\ 1 & \text{für} \quad x=2\\ \frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+3 & \text{für} \quad x>2\end{cases}$$

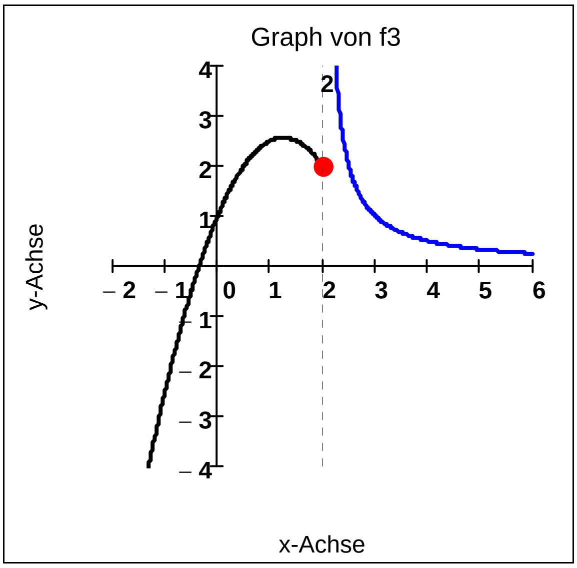
Der Graph von f_2 hat an der Stelle $x_0 = 2$ bei linksseitiger und rechtsseitiger Annäherung zwar übereinstimmende Grenzwerte, die jedoch nicht mit dem Funktionswert f(2) übereinstimmen.



Beispiel 3

$$f_3(x)=\begin{cases}-x^2+\frac{5}{2}\cdot x+1 & \text{für} \quad x\le 2\\ \frac{1}{x-2} & \text{für} \quad x>2\end{cases}$$

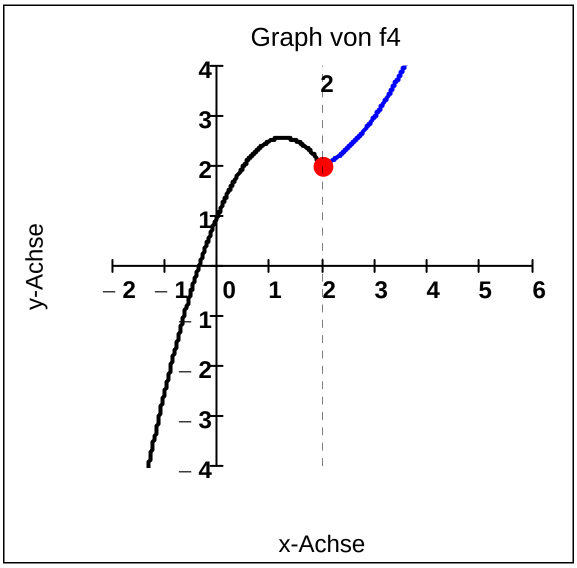
Der Graph von f_3 hat bei linksseitiger Annäherung an die Stelle $x_0 = 2$ einen Grenzwert, der mit dem Funktionswert f(2) übereinstimmt.
Allerdings existiert der rechtsseitige Grenzwert nicht.



Beispiel 4

$$f_4(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{5}{2} \cdot x + 1 & \text{für} \quad x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 3 & \text{für} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

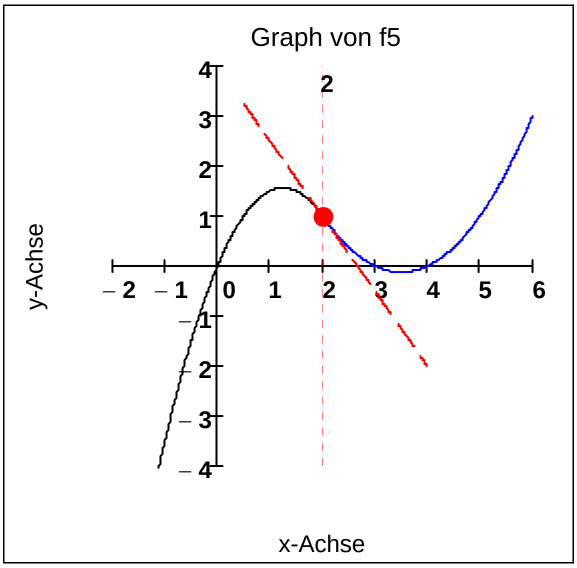
Der Graph von f_4 hat an der Stelle $x_0 = 2$ bei linksseitiger und rechtsseitiger Annäherung übereinstimmende Grenzwerte, die mit dem Funktionswert f(2) übereinstimmen.



Beispiel 5

$$f_5(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{5}{2} \cdot x & \text{für} \quad x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6 & \text{für} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

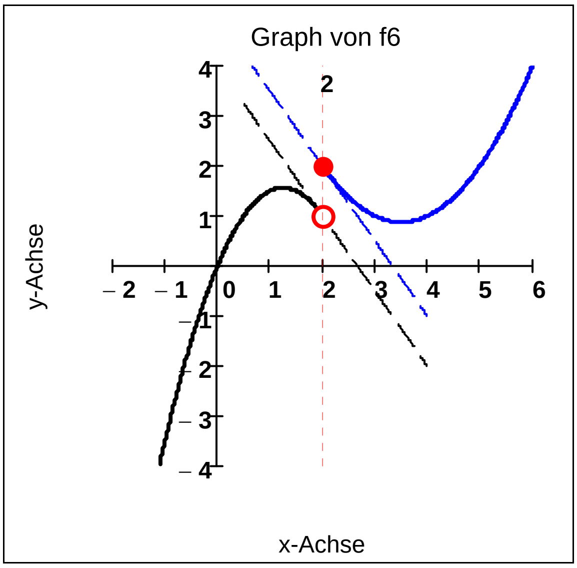
Der Graph von f_5 hat an der Stelle $x_0 = 2$ bei linksseitiger und rechtsseitiger Annäherung übereinstimmende Grenzwerte, die mit dem Funktionswert f(2) übereinstimmen, und übereinstimmende Tangentensteigungen.
Man sagt, der Übergang an der Stelle $x_0 = 2$ ist **glatt**.



Beispiel 6

$$f_6(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{5}{2} \cdot x & \text{für} \quad x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 7 & \text{für} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Der Graph von f_6 hat an der Stelle $x_0 = 2$ bei linksseitiger und rechtsseitiger Annäherung übereinstimmende Tangentensteigungen, jedoch stimmen die Grenzwerte nicht überein.



Es geht darum, das Verhalten an der Nahtstelle zu charakterisieren. Wir brauchen ein Kriterium für die Eigenschaft ***ohne Sprungstelle und ohne Kante***.

3.3 Stetigkeit

Im Folgenden gilt:
Die Funktion f sei in einem offenen Intervall $J =]a;b[$ definiert mit $x_0 \in]a;b[$.

Definition 1

Die Funktion heißt **stetig an der Stelle x_0,** wenn gilt:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 - h) = \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Bemerkung
Die linke Schreibweise ist die sogenannte ***h-Methode***, während die rechte Schreibweise die verkürzte Form darstellt.

Bezeichnung

Die Funktion heißt **unstetig an der Stelle x_0**, wenn zwar Funktionswert und Grenzwert existieren, aber nicht übereinstimmen, oder wenn ein Funktionswert aber kein Grenzwert existiert.

Definition 2
Die Funktion f heißt **im offenen Intervall $I =]a;b[$ stetig,** wenn sie an jeder Stelle $x_0 \in]a;b[$ stetig ist.

Definition 3

Die Funktion heißt **im abgeschlossenen Intervall $I = [a;b]$ stetig,**

- wenn sie im offenen Intervall]a ; b[stetig ist und
- wenn für den linken Rand gilt: $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ bzw.
- wenn für den rechten Rand gilt: $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(b-h) = f(b)$.

3.4 Differenzierbarkeit

Die Funktion muss stetig sein und die Steigung der Tangente links der Nahtstelle muss mit der Steigung der Tangente rechts der Nahtstelle übereinstimmen.

Das heißt: **Es gibt nur eine gemeinsame Tangente.**

Definition
Eine abschnittsweise definierte Funktion f heißt **differenzierbar an der Nahtstelle x_0**, wenn gilt:

(1) **f ist in x_0 stetig**

(2) $\lim_{h\to 0} f'(x_0 - h) = \lim_{h\to 0} f'(x_0 + h) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$

Merke
Die **Stetigkeit** ist eine **notwendige Bedingung** für die Differenzierbarkeit.
Das heißt: Eine Funktion, die an x_0 **nicht stetig** ist, ist auch **nicht differenzierbar**, selbst wenn die Steigungen der Tangenten übereinstimmen.

Zu Beispiel 1

Überprüfen Sie die Stetigkeit und Differenzierbarkeit folgender Funktion:

$$f_1(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{5}{2}\cdot x + 1 & \text{für} \quad x < 2 \\ 1 & \text{für} \quad x = 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$$

Lösung

Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 2-h}\left[-x^2 + \frac{5}{2}\cdot x + 1\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left[-(2-h)^2 + \frac{5}{2}\cdot(2-h) + 1\right] \to 2$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 2+h}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{1}{2}(2+h)^2 - \frac{3}{2}(2+h)\right] \to 1$

Die Grenzwerte stimmen nicht überein $\Rightarrow$ Funktion f_1 ist nicht stetig an $x_0 = 2$
$\Rightarrow$ Funktion f_1 ist nicht differenzierbar.

Zu Beispiel 2

Überprüfen Sie die Stetigkeit und Differenzierbarkeit folgender Funktion:

$$f_2(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{5}{2}\cdot x + 1 & \text{für} \quad x < 2 \\ 1 & \text{für} \quad x = 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 3 & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$$

Lösung

Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 2-h}\left[-x^2 + \frac{5}{2}\cdot x + 1\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left[-(2-h)^2 + \frac{5}{2}\cdot(2-h) + 1\right] \to 2$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 2+h}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 3\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{1}{2}(2+h)^2 - \frac{3}{2}(2+h) + 3\right] \to 2$

Funktionswert: $f_2(2) = 1$

Die Grenzwerte stimmen überein, mit dem Funktionswert jedoch nicht.
$\Rightarrow$ Funktion f_2 ist nicht stetig an $x_0 = 2$ $\Rightarrow$ Funktion f_2 ist nicht differenzierbar.

Zu Beispiel 3

Überprüfen Sie die Stetigkeit und Differenzierbarkeit folgender Funktion:

$$f_3(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{5}{2} \cdot x + 1 & \text{für} \quad x \le 2 \\ \frac{1}{x-2} & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$$

Lösung

Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 2-h} \left[-x^2 + \frac{5}{2} \cdot x + 1 \right] = \lim\limits_{h \to 0} \left[-(2-h)^2 + \frac{5}{2} \cdot (2-h) + 1 \right] \to 2$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 2+h} \left[\frac{1}{x-2} \right] = \lim\limits_{h \to 0} \left[\frac{1}{(2+h)-2} \right] = \lim\limits_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \right] \to +\infty$

Funktionswert: $f_3(2) = 2$

Linksseitiger Grenzwert und Funktionswert stimmen überein, der rechtsseitige Grenzwert existiert jedoch nicht $\Rightarrow$ Funktion f_3 ist nicht stetig an $x_0 = 2$ $\Rightarrow$ Funktion f_3 ist nicht differenzierbar.

Zu Beispiel 4

Überprüfen Sie die Stetigkeit und Differenzierbarkeit folgender Funktion:

$$f_4(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{5}{2} \cdot x + 1 & \text{für} \quad x < 2 \\ \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + 3 & \text{für} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Lösung

Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 2-h} \left[-x^2 + \frac{5}{2} \cdot x + 1 \right] = \lim\limits_{h \to 0} \left[-(2-h)^2 + \frac{5}{2} \cdot (2-h) + 1 \right] \to 2$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 2+h} \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + 3 \right] = \lim\limits_{h \to 0} \left[\frac{1}{2} (2+h)^2 - \frac{3}{2} (2+h) + 3 \right] \to 2$

Funktionswert: $f_2(2) = 2$

Die Grenzwerte stimmen überein, ebenso mit dem Funktionswert
$\Rightarrow$ Funktion f_4 ist stetig an $x_0 = 2$

$$f_4\,'(x) = \begin{cases} -2x + \frac{5}{2} & \text{für} \quad x < 2 \\ x - \frac{3}{2} & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$$

Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 2-h} \left[-2x + \frac{5}{2} \right] = \lim\limits_{h \to 0} \left[-2(2-h) + \frac{5}{2} \right] \to -\frac{3}{2}$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 2+h} \left[x - \frac{3}{2} \right] = \lim\limits_{h \to 0} \left[(2+h) - \frac{3}{2} \right] \to \frac{1}{2}$

Die Grenzwerte von $f_4\,'$ stimmen nicht überein, $\Rightarrow$ Funktion f_2 nicht differenzierbar.

<u>Zu Beispiel 5</u>

Überprüfen Sie die Stetigkeit und Differenzierbarkeit folgender Funktion:

$$f_5(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{5}{2} \cdot x & \text{für} \quad x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6 & \text{für} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

<u>Lösung</u>

Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 2-h} \left[-x^2 + \frac{5}{2} \cdot x \right] = \lim\limits_{h \to 0} \left[-(2-h)^2 + \frac{5}{2} \cdot (2-h) \right] \to 1$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 2+h} \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6 \right] = \lim\limits_{h \to 0} \left[\frac{1}{2}(2+h)^2 - \frac{7}{2}(2+h) + 6 \right] = 1$

Funktionswert: $f_5(2) = \frac{1}{2}2^2 - \frac{7}{2}2 + 6 = 1$

Die Grenzwerte und Funktionswert stimmen überein, $\Rightarrow$ Funktion f_5 ist stetig an $x_0 = 2$

$$f_5\,'(x) = \begin{cases} -2x + \frac{5}{2} & \text{für} \quad x < 2 \\ x - \frac{7}{2} & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$$

Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 2-h} \left[-2x + \frac{5}{2} \right] = \lim\limits_{h \to 0} \left[-2(2-h) + \frac{5}{2} \right] \to -\frac{3}{2}$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 2+h} \left[x - \frac{7}{2} \right] = \lim\limits_{h \to 0} \left[(2+h) - \frac{7}{2} \right] \to -\frac{3}{2}$

Die Grenzwerte von $f_5\,'$ stimmen überein, $\Rightarrow$ Funktion f_5 ist differenzierbar.

Zu Beispiel 6

Überprüfen Sie die Stetigkeit und Differenzierbarkeit folgender Funktion:

$$f_6(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{5}{2} \cdot x & \text{für} \quad x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 7 & \text{für} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 2-h} \left[-x^2 + \frac{5}{2} \cdot x \right] = \lim\limits_{h \to 0} \left[-(2-h)^2 + \frac{5}{2} \cdot (2-h) \right] \to 1$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 2+h} \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 7 \right] = \lim\limits_{h \to 0} \left[\frac{1}{2}(2+h)^2 - \frac{7}{2}(2+h) + 7 \right] = 2$

Funktionswert: $f_6(2) = \frac{1}{2}2^2 - \frac{7}{2}2 + 7 = 2$

Linksseitiger Grenzwert und Funktionswert stimmen nicht überein $\Rightarrow$ Funktion nicht stetig an $x_0 = 2$ $\Rightarrow$ Funktion nicht differenzierbar.

4 Stetigkeitssätze

Viele Probleme technischer, naturwissenschaftlicher, ökonomischer und mathematischer Art bestehen darin, für gewisse Funktionen einen maximalen oder auch minimalen Funktionswert zu bestimmen.

Häufig sind ***absolute Extremwerte*** auf einem eingeschränkten Definitionsbereich gesucht.

Stetige Funktionen erweisen sich nützlich zur Lösung von Aufgaben aus Physik und Technik und zur Optimierung bei Problemstellungen, die eine ***Randbedingung*** enthalten.

Verknüpfungssatz

Gegeben sind zwei in einem abgeschlossenen Intervall $J = [a\,;\,b]$ stetige Funktionen u und v. Dann sind die zusammengesetzten Funktionen

$f_1(x) = u(x) + v(x)$, $f_2(x) = u(x) - v(x)$, $f_3(x) = u(x) \cdot v(x)$, $f_4(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \wedge v(x) \neq 0$ für alle $x \in J$

stetig in diesem Intervall.

Folgerung

Reine Potenzfunktionen x^n mit $n \in Z$ sind stetig auf IR, das heißt, auch jede ganzrationale Funktion ist stetig auf IR.

Zwischenwertsatz

Ist eine Funktion auf dem **abgeschlossenen Intervall** [a ; b] stetig, so nimmt f jeden Wert an, der zwischen f(a) und f(b) liegt.

Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion
$f(x) = 0{,}5\,x^3 - 1{,}8\,x^2 + 2{,}3\,x - 0{,}6$ mit $x \in IR$.

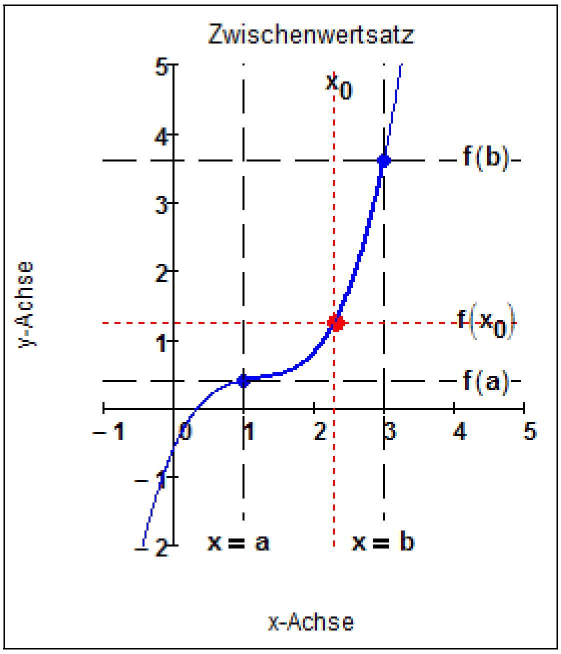
Sie ist **stetig auf dem abgeschlossenen Intervall [a ; b]**.

Linke Intervallgrenze: $f(1) = 0{,}4$
Rechte Intervallgrenze: $f(3) = 3{,}6$

Folgerung aus dem Satz:

Jeder Wert zwischen den Funktionswerten **f(a)** und **f(b)** wird angenommen.

Allgemein: $f(a) \leq f(x_0) \leq f(b)$



Nullstellensatz

Ist f eine im **abgeschlossenen Intervall $J = [a ; b]$ stetige Funktion** und gilt $\mathbf{f(a) \cdot f(b) < 0}$, so hat f im Intervall **mindestens eine Nullstelle**.

Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion
$f(x) = 0{,}5\,x^3 - 1{,}8\,x^2 + 2{,}3\,x - 2{,}6$ mit $x \in IR$.

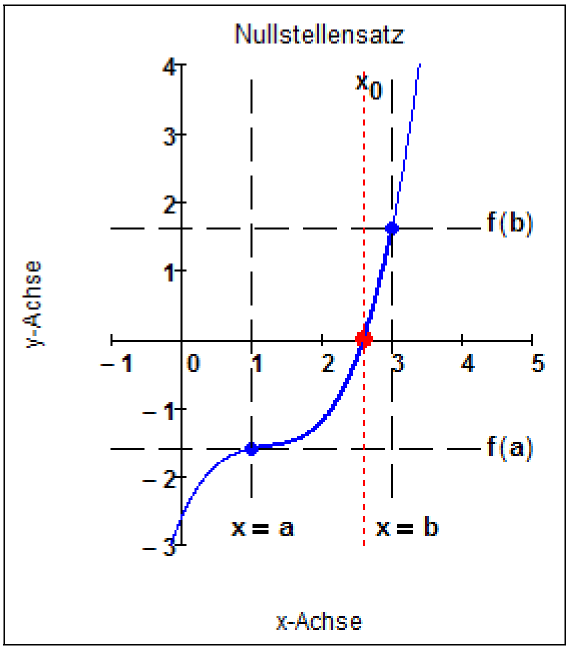
Sie ist **stetig auf dem abgeschlossenen Intervall [a ; b]**.

Linke Intervallgrenze: $f(1) = -1{,}6$
Rechte Intervallgrenze: $f(3) = +1{,}6$

Folgerung aus dem Satz:

Es tritt ein **Vorzeichenwechsel** auf, also muss im Intervall [1 ; 3] eine Nullstelle x_0 existieren.

Allgemein: $f(a) \le f(x_0) \le f(b)$



Extremwertsatz

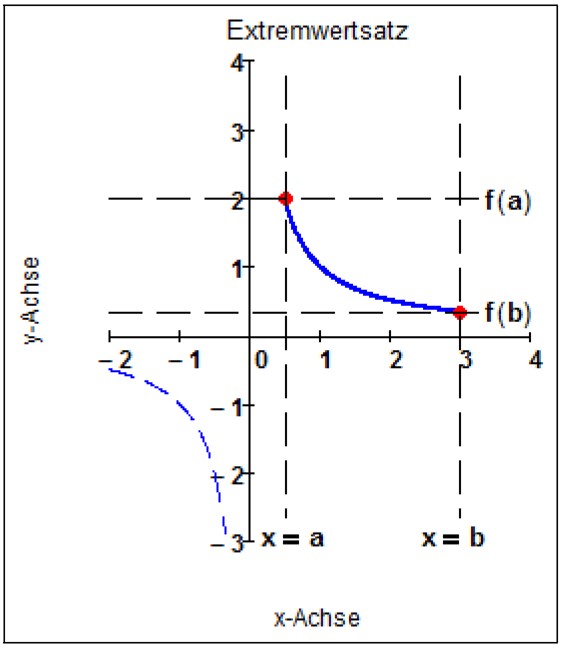
Ist f eine auf einem **abgeschlossenen Intervall $J = [a ; b]$ stetige Funktion**, so ist f dort beschränkt und nimmt **Minimum** und **Maximum** an.
Es gibt also x_1 , $x_2 \in [a ; b]$ mit $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$.

Beispiel 3

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ mit $x \in \left[0{,}5 ; 3 \right]$.

Der Graph von f ist in $\left[0{,}5 ; 3 \right]$ streng monoton fallend.

$y_{max} = f(0{,}5) = 2$ ist Randmaximum
$y_{min} = f(3) = 0{,}\overline{3}$ Randminimum



Beispiel 4

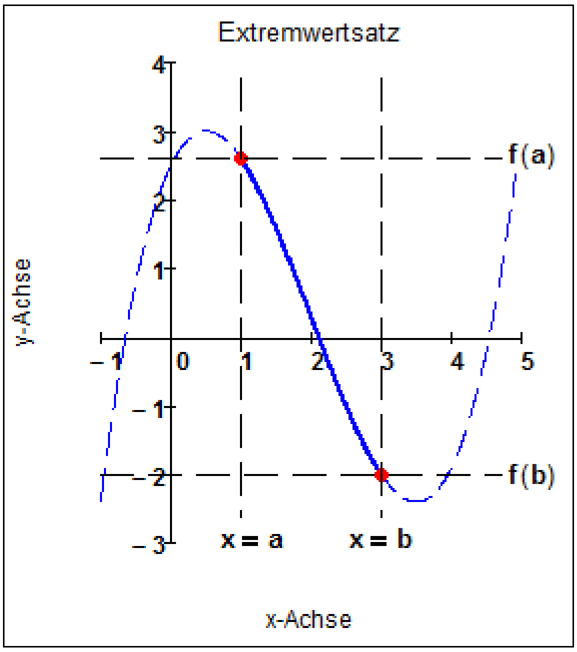
$f(x) = \frac{1}{10} \cdot \left(4x^3 - 24x^2 + 21x + 25\right)$

mit $x \in [1;3]$.

Der Graph von f ist in $[1;3]$ streng monoton fallend.

$y_{max} = f(1) = 2{,}6$ ist Randmaximum

$y_{min} = f(3) = -2$ ist Randminimum



Beispiel 5

$f(x) = \frac{1}{10} \cdot \left(4x^3 - 24x^2 + 21x + 25\right)$

mit $x \in [-0{,}5\,;\,4]$.

$f'(x) = \frac{1}{10} \cdot \left(12x^2 - 48x + 21\right)$

Relative Extremstellen: $12x^2 - 48x + 21 = 0$

$\Rightarrow \quad x_{E1} = 0{,}5;\ x_{E2} = 3{,}5;$

$f(0{,}5) = 3;\ f(3{,}5) = -2{,}4$

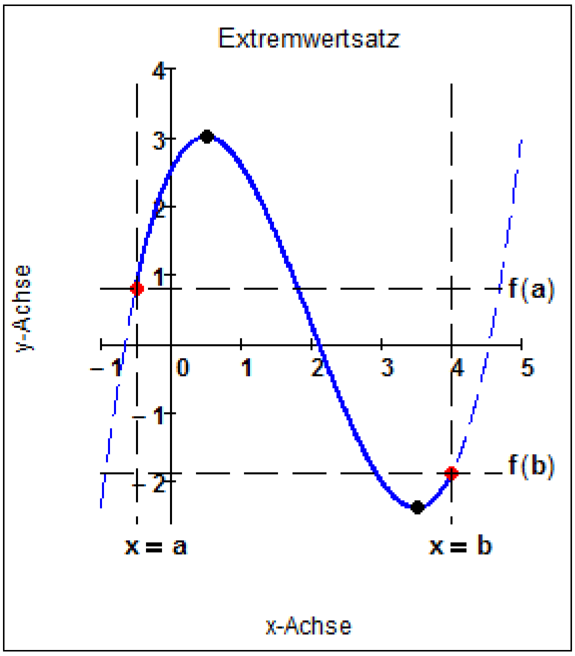
Vergleich mit den Randwerten:

$y_1 = f(-0{,}5) = 0{,}8$ ist Randminimum

$y_2 = f(4) = -1{,}9$ ist Randmaximum

$\Rightarrow$ Absolutes Maximum: $y_{max} = 3$

Absolutes Minimum: $y_{min} = 2{,}4$



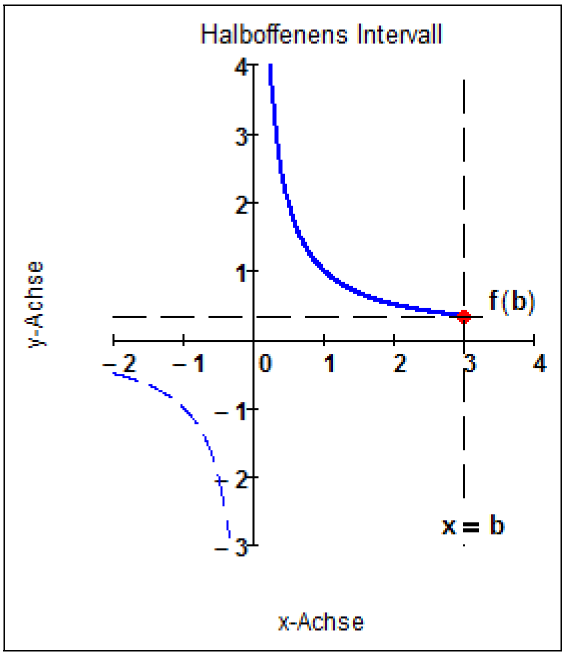
Bemerkung

Die folgenden Beispiele zeigen, dass die Aussage im Extremwertsatz falsch sein kann, wenn das Intervall **nicht abgeschlossen** ist oder die Funktion **nicht stetig** ist.

Gegenbeispiele

Beispiel 6

$f(x) = \frac{1}{x}$ mit $x \in \left]0\,;3\right].$



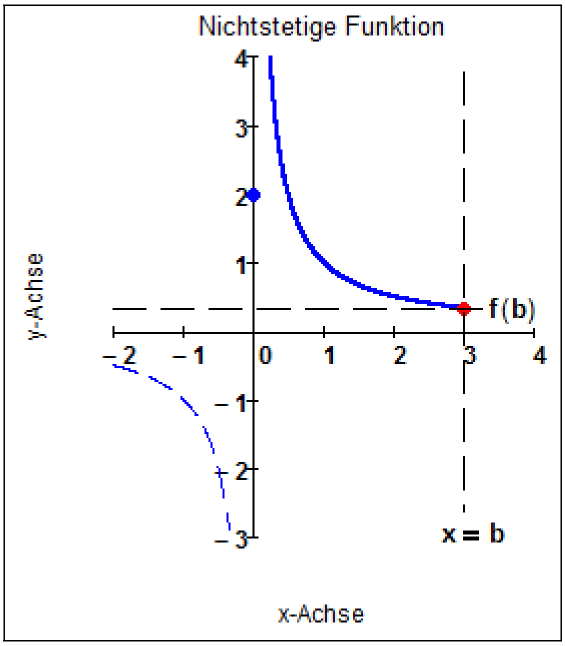
Die Funktion f ist stetig auf dem halboffenen Intervall $\left]0\,;3\right]$.

Der Graph von f ist im **halboffenen** Intervall $\left]0\,;3\right]$ streng monoton fallend.
Die Funktionswerte sind nicht nach oben beschränkt, es existiert ein Minimum, jedoch kein Maximum.

$y_{in} = f(3) = 0{,}\overline{3}$ ist Randminimum

Beispiel 7

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für} \quad x > 0 \\ 2 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases} \qquad \text{mit } x \in \left[0\,;3\right]$$



Die Funktion f in einem abgeschlossenen Intervall $\left[0\,;3\right]$ definiert, sie ist jedoch an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig, denn bei rechtsseitiger Annäherung besitzt sie keinen Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \to +\infty$

Der Graph von f ist im **halboffenen** Intervall $\left]0\,;3\right]$ streng monoton fallend.
Die Funktionswerte sind nicht nach oben beschränkt, es existiert ein Minimum, jedoch kein Maximum.

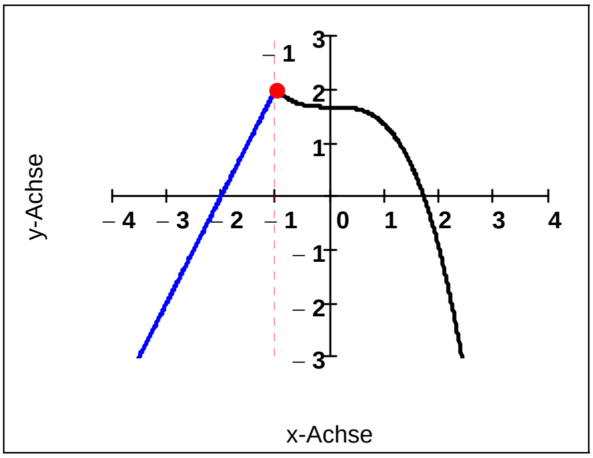
$y_{in} = f(3) = 0{,}\overline{3}$ ist Randminimum

5 Randextrema, lokale (relative) und globale (absolute) Extrema

Ist eine abschnittsweise definierte Funktion an den Rändern der Definitionsmenge oder den Nahtstellen stetig, so kann auf diesen Rändern ein ***lokales Extremum*** liegen.
Zur Berechnung der ***globalen Extrempunkte*** vergleicht man alle existierenden lokalen Extrema miteinander und wählt jeweils den kleinsten oder größten Wert.
Die globalen Extremwerte müssen nicht unbedingt mit den lokalen Extrempunkten zusammenfallen, sondern können auch bei nichtstetigen Funktionen auf den Abschnittsrändern liegen.

<u>Beispiel 1</u>

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{für} \quad x \le -1 \\ -\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5}{3} & \text{für} \quad x > -1 \end{cases}$$



Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to -1^-} \left[2x+4\right] \to 2$

Rechtsseitiger Grenzw.: $\lim\limits_{x \to -1^-} \left[-\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5}{3}\right] \to 2$

Funktionswert: $f(2) = 2$

$\Rightarrow$ f(x) ist stetig an $x_0 = -1$.

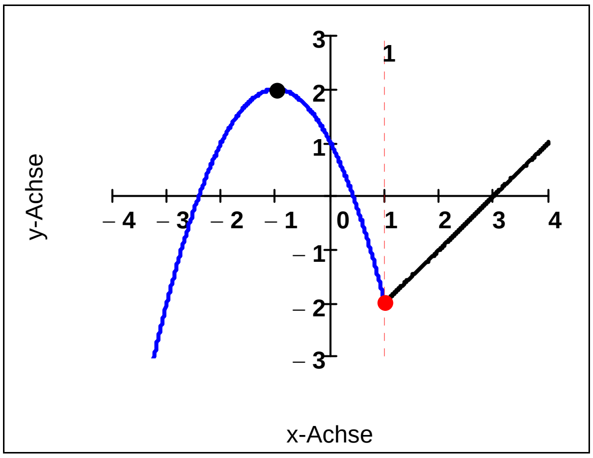
Ableitungsfunktion: $f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{für} \quad x < -1 \\ -x^2 & \text{für} \quad x > -1 \end{cases}$

Linksseitige Steigung: $\lim\limits_{x \to -1^-} \left[2\right] \to 2$; Rechtsseitige Steigung: $\lim\limits_{x \to -1^-} \left[-x^2\right] \to -1$

G_f ändert das Monotonieverhalten von streng monoton steigend zu streng monoton fallend.
$\Rightarrow$ lokales, hier sogar ***globales Maximum*** $y_0 = 2$ auf der Nahstelle $x_0 = -1$.

<u>Beispiel 2</u>

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 + 2 & \text{für} \quad x \le 1 \\ x-3 & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$



Nahtstelle: $x_0 = 1$

Funktionswert: $f(1) = -2$

Rechtsseitiger Grenzw.: $\lim\limits_{x \to 1^-} \left[x-3\right] \to -2$

$\Rightarrow$ f(x) ist stetig an $x_0 = -1$.

Ableitungsfunktion:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x-2 & \text{für} \quad x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$

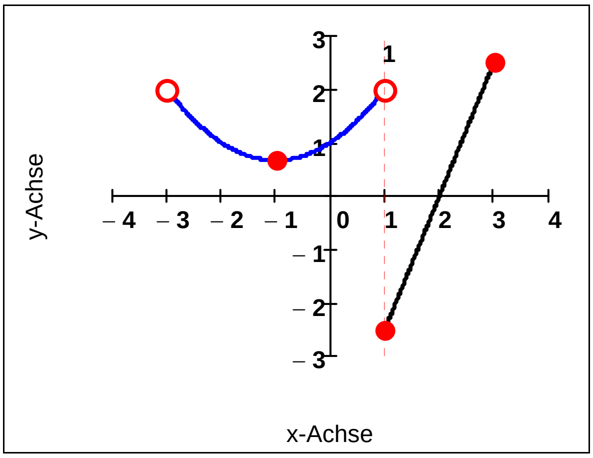
Linksseitige Steigung an der Nahtstelle: $\lim\limits_{x \to 1^-} \left[-2x-2\right] \to -4$

Rechtsseitige Steigung an der Nahtstelle: $\lim\limits_{x \to 1^-} \left[1\right] \to 1$

G_f ändert das Monotonieverhalten von streng monoton fallend zu streng monoton steigend.
$\Rightarrow$ ***lokales Minimum*** $y_0 = -2$ auf der Nahstelle $x_0 = 1$.

Für $x < 1$ existiert an der Stelle $x_1 = -1$ ein ***lokales Maximum*** $y_1 = 2$ (Scheitel der Parabel).

<u>Beispiel 3</u>



$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1 & \text{für} \quad -3<x<1\\ \frac{5}{2}x-5 & \text{für} \quad 1\le x\le 3\end{cases}$$

Linker Rand: $\lim\limits_{x\to -3^+}\left[\frac{1}{3}(x+1)^2+\frac{2}{3}\right]\to 2$

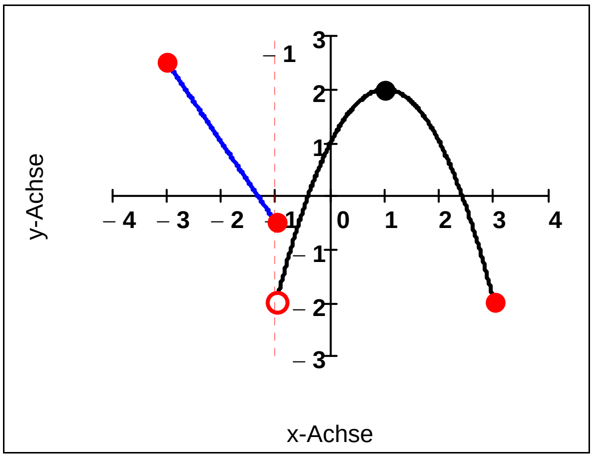
Links der Nahtstelle: $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\frac{1}{3}(x+1)^2+\frac{2}{3}\right]\to 2$

Intervall $]-3;1[$: Globales (absolutes) Minimum $y_0=f(-1)=\frac{2}{3}$

Intervall $[1;3]$: Globales (absolutes) Minimum auf dem Rand: $y_1=f(1)=-\frac{5}{2}$ und ein

globales (absolutes) Maximum auf dem rechten Rand: $y_2=f(3)=+\frac{5}{2}$

<u>Beispiel 4</u>



$$f(x)=\begin{cases}-\frac{3}{2}x-2 & \text{für} \quad -3\le x\le -1\\ -x^2+2x+1 & \text{für} \quad -1<x\le 3\end{cases}$$

Rechts der Nahtstelle $x_0=-1$:
$\lim\limits_{x\to -1^+}\left[-x^2+2x+1\right]\to -2$

Auf der Nahtstelle: $y_0=f(-1)=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ f(x) ist nicht stetig an $x_0=-1$.

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{3}{2} & \text{für} \quad -3<x<-1\\ -2x+2 & \text{für} \quad -1<x<3\end{cases}$$

Intervall $]-3;-1[$: Randmaximum $y_{max}=f(-3)=2{,}5$

Randminimum $y_{min}=f(-1)=-\frac{1}{2}$

Intervall $]-1;3[$: Hor. Tangenten: $f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x+2=0 \Leftrightarrow x_1=1$

G_f ist streng monoton steigend für $-1<x\le 1$,

G_f ist streng monoton fallend für $1\le x\le 3$.

$\Rightarrow$ lokales Maximum $y_1=f(1)=2$ ist sogar globales Maximum durch Vergleich mit dem rechten Randwert: $y_3=f(3)=2$ ist Randminimum und globales Minimum

6 Aufgaben mit Anwendungsbezug und Optimierung

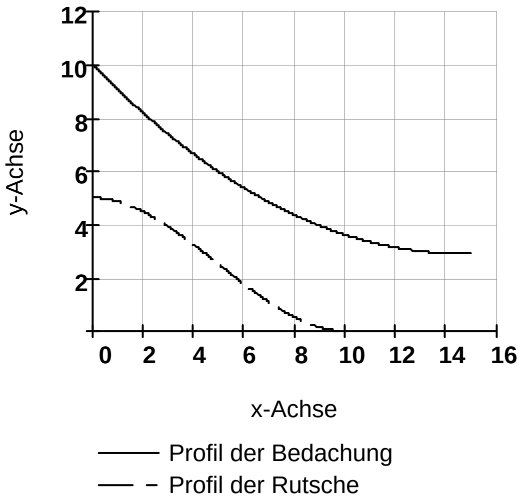
Ist f auf einem *abgeschlossenen Intervall [a ; b] definiert, so ergeben sich die* ***globalen (absoluten) Extrema***, indem man die ***lokalen (relativen) Extremstellen*** bestimmt und deren Funktionswerte mit den Funktionswerten am Rand vergleicht.

Aufgabe 1 (aus der Abschlussprüfung 2005, 12 Nichttechnik, A II)

Nebenstehende Skizze zeigt den Querschnitt einer überdachten Wasserrutsche. Der Graph G_w stellt die Wasserrutsche, der Graph G_b stellt die Bedachung dar, die über die Rutsche hinaus verlängert ist.
Die Funktionen w und b sind gegeben durch

$$w(x) = \frac{1}{100}\left(x^3 - 15x^2 + 500\right) \text{ mit } D_w = [0;10]$$

und $b(x) = \frac{1}{30}x^2 - \frac{35}{36}x + 10$ mit $D_b = [0;15]$.



a) Berechnen Sie, an welcher Stelle x_1 die Wasserrutsche das stärkste Gefälle aufweist.

b) Kondenswasser, das sich an der Unterseite der Bedachung gebildet hat, tropft von der tiefsten Stelle des Daches herunter. Berechnen Sie die Stelle x_2, an der das Wasser heruntertropft.

c) Die Funktion d mit $D_d = [0;10]$ und dem Funktionsterm d(x) beschreibt den in y-Richtung gemessenen Abstand zwischen Wasserrutsche und Dach.
Zeigen Sie, dass sich $d(x)$ auch in der Form $d(x) = -\frac{1}{100}x^3 + \frac{11}{60}x^2 - \frac{35}{36}x + 5$ schreiben lässt.

d) Aus Sicherheitsgründen wird ein in y-Richtung gemessener Mindestabstand zwischen Wasserrutsche und Dach von 3,30 (LE) vorgegeben.
Untersuchen Sie rechnerisch, ob dieser Mindestabstand an jeder Stelle eingehalten wird.

Lösung zu Teilaufgabe a)

Das Gefälle wird durch die Änderungsrate $w'(x)$ beschrieben. Das stärkste Gefälle ist also ein Extremum von $w'(x)$, also der Wendepunkt von $w(x)$.

1. Ableitung: $w'(x) = \frac{1}{100}\left(3x^2 - 30x\right)$

2. Ableitung: $w''(x) = \frac{1}{100}\left(6x - 30\right)$

Flachstelle: $w''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x - 30 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 5$, Wendestelle, da einfache Nullstelle von $w''(x)$.

Steigung: $w'(5) = \frac{1}{100}\left(3 \cdot 25^2 - 30 \cdot 5\right) = -\frac{3}{4}$ negativ, also größtes Gefälle.

Lösung zu Teilaufgabe b)

1. Ableitung: $b'(x) = \frac{1}{15}x - \frac{35}{36}$

2. Ableitung: $b''(x) = \frac{1}{15}$

Relative Extremstellen: $b'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{15}x - \frac{35}{36} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{35 \cdot 15}{36} = \frac{175}{12} = 14{,}6$

Art der Extremstelle: $b''\left(\frac{175}{12}\right) = \frac{1}{15} > 0$, also ein relatives Minimum.

Das Wasser tropft an der Stelle 14,6 vom Dach herunter.

Lösung zu Teilaufgabe c)

Differenzfunktion: $d(x) = b(x) - w(x) = \frac{1}{30}x^2 - \frac{35}{36}x + 10 - \frac{1}{100}\left(x^3 - 15x^2 + 500\right)$

Vereinfachen: $d(x) = -\frac{1}{100}x^3 + \frac{11}{60}x^2 - \frac{35}{36}x + 5$

Lösung zu Teilaufgabe d)

1. Ableitung: $d'(x) = -\frac{3}{100}x^2 + \frac{11}{30}x - \frac{35}{36}$

Relative Extremstellen: $d'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{100}x^2 + \frac{11}{30}x - \frac{35}{36} = 0$

$\Rightarrow \quad d_1 = \frac{35}{9} \approx 3{,}9 \in D_d; \quad d_2 = \frac{25}{3} \approx 8{,}3 \in D_d$

Funktionswerte: $d\left(\frac{35}{9}\right) = 3{,}4$ (rel. Minimum); $d\left(\frac{25}{3}\right) = 3{,}8$ (rel. Maximum)

Vergleich mit den Randwerten: $d(0) = 5 > 3{,}4$; $d(10) = \frac{65}{18} \approx 3{,}6 > 3{,}4$

Das relative Minimum ist also das absolute Minimum: $d_{min} = 3{,}4$.

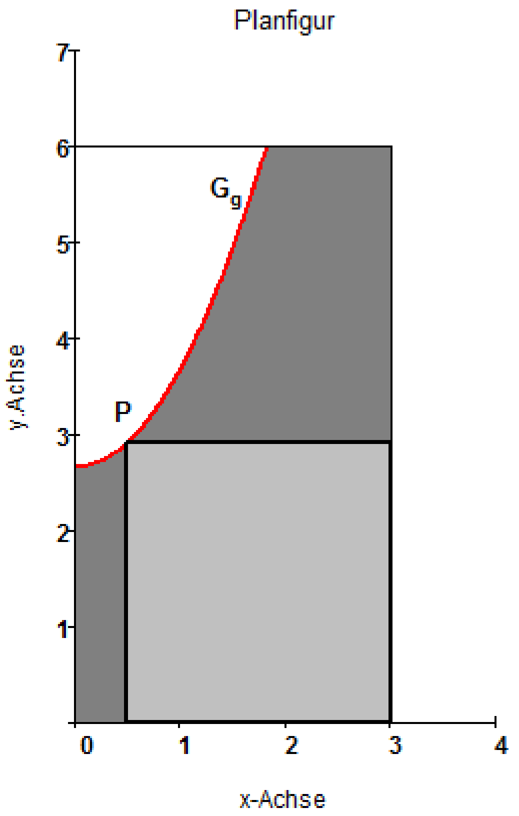
De Mindestabstand von 3,3 LE wird also an jeder Stelle der Rutsche eingehalten.

Aufgabe 2 (aus der Abschlussprüfung 2003, 12 Nichttechnik, A I)

Die dunkel gefärbte Fläche in der nebenstehenden Skizze stellt den Rest einer längs eines Parabelstücks G_p zersprungenen ehemals rechteckigen Glasplatte dar.
Der zu diesem Parabelstück gehörende Funktionsterm lautet:

$$g(x) = x^2 + \frac{8}{3} \quad \text{mit } D_g = \left[\, 0;\ \sqrt{\frac{10}{3}}\, \right].$$

Aus dem Rest der Glasplatte soll eine achsenparallele Scheibe (hellgrau) so geschnitten werden, dass der Punkt P(a / g(a)) auf G_g liegt.



a) Stellen Sie die Maßzahl A(a) der "neuen" Rechtecksfläche in Abhängigkeit von der Abszisse a des Punktes P dar. Geben Sie auch eine sinnvolle Definitionsmenge D_A an. (Lage von P siehe Skizze!)
Mögliches Teilergebnis:

$$A(a) = -a^3 + 3a^2 - \frac{8}{3}a + 8$$

b) Bestimmen Sie nun denjenigen Wert von a, für den der Flächeninhalt den größten Wert A_{max} annimmt. Berechnen Sie auch A_{max}.

Lösung zu Teilaufgabe a)

Rechtecksfläche: $A(a) = (3-a)\cdot g(a) = (3-a)\cdot\left(a^2 + \frac{8}{3}\right) = -a^3 + 3a^2 - \frac{8}{3}a + 8$

Definitionsmenge: $g(x) = 6 \;\Leftrightarrow\; x^2 + \frac{8}{3} = 6 \;\Leftrightarrow\; x^2 = \frac{10}{3} \;\Leftrightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{10}{3}} = \pm 1{,}8$

$$D_A = \left[\, 0;\ \sqrt{\frac{10}{3}}\, \right]$$

Lösung zu Teilaufgabe b)

Ableitungsfunktion: $A'(a) = -3a^2 + 6a - \frac{8}{3}$

Bestimmung der rel. Extrema: $A'(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; -3a^2 + 6a - \frac{8}{3} = 0$

$$\Rightarrow\; a_1 = \frac{2}{3} = 0{,}7;\ a_2 = \frac{4}{3} = 1{,}\overline{3}$$

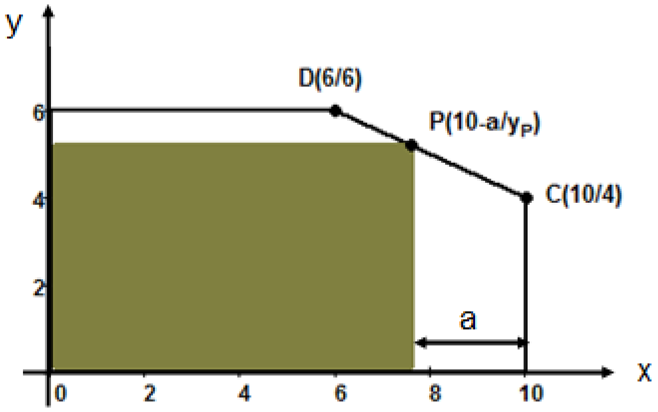
Funktionswerte: $A\left(\frac{2}{3}\right) = 7{,}3;\ A\left(\frac{4}{3}\right) = 7{,}4$

Vergleich mit den Randwerten: $A(0) = 8;\ A\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = 7{,}0$

A ist eine stetige Funktion auf einem abgeschlossnen Intervall, d. h. das absolute Maximum wird auf dem linken Rand angenommen: $A_{max} = 8$

Aufgabe 3 (aus der Abschlussprüfung 2004, 12 Nichttechnik, A I)

Aus einem fünfeckigen Brett soll ein rechteckiges Stück herausgesägt werden (siehe Skizze). Dabei soll der Punkt P auf der Strecke [CD] liegen.



a) Stellen Sie die Flächenmaßzahl A(a) des Rechtecks in Abhängigkeit der Seitenlänge dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_A der Funktion A an.
Mögliches Teilergebnis:
$$A(a) = -\frac{1}{2}\cdot\left(a^2 - 2a - 80\right)$$

b) Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den die Rechtecksfläche den größten Wert annimmt. Berechnen Sie auch, wie groß in diesem Fall der „Abfall" in Prozent bezogen auf die Fläche des Fünfecks ist.

Lösung zu a)

Flächenmaßzahl: $A(a) = \left(10 - a\right)\cdot y_P$

Gerade durch CD: $g_{CD}(x) = \frac{4-6}{10-6}\cdot(x-10)+4 = -\frac{1}{2}\cdot(x-10)+4 = -\frac{1}{2}x+9$

Punkt P liegt auf g_{CD}: $y_P = g_{CD}(10-a) = -\frac{1}{2}\left(10-a\right)+9 = \frac{1}{2}a+4$

Einsetzen: $A(a) = \left(10-a\right)\cdot\left(\frac{1}{2}a+4\right) = -\frac{1}{2}a^2+a+40$

Definitionsmenge: $D_A = \left[0;\ 4\right]$

Lösung zu b)

Ableitung: $A'(a) = -a+1$

Horizontale Tangenten: $A'(a) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad -a+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad a_0 = 1$

Funktionswert: $A_0 = A(1) = 40{,}5$

Da die Flächenmaßzahlfunktion A eine nach unten geöffnete Parabel ist, ist das relative Maximum A_0 auch das absolute Maximum: $A_{max} = A(1) = 40{,}5$

Die Fläche des Fünfecks setzt sich z. B. aus zwei Rechtecksflächen und einer Dreiecksfläche zusammen: $A_{ges} = 6\cdot 6 + 4\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2 = 56$

Abfall: $\frac{A_{ges} - A_{max}}{A_{ges}} = \frac{56 - 40{,}5}{56} = 0{,}28 \mathrel{\hat{=}} 28\%$