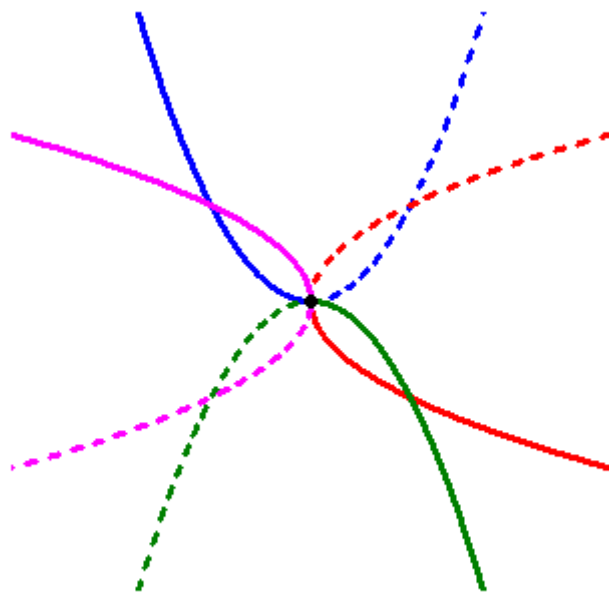


EINFACHE UMKEHRFUNKTIONEN



Inhaltsverzeichnis

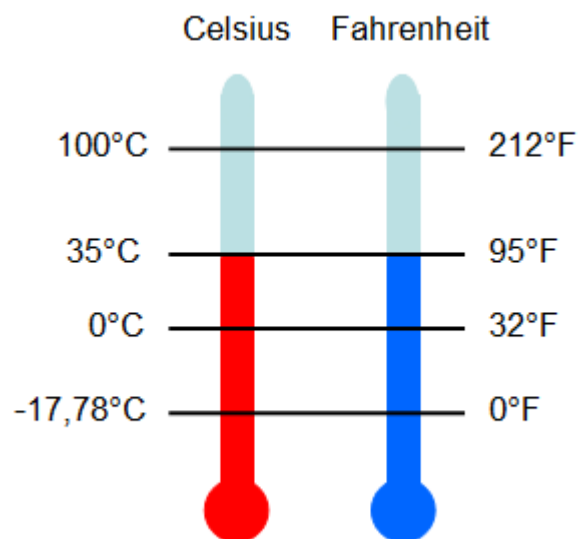
Kapitel	Inhalt	Seite
1	Einführungsbeispiel	1
2	Der Begriff Umkehrfunktion	2
3	Die Umkehrfunktion der linearen Funktion	3
4	Die Umkehrfunktion der quadratischen Funktion	4

Umkehrfunktionen

1 Einführungsbeispiel

Temperaturen werden in den USA oder in England nicht, wie in Deutschland, in der Einheit Celsius (°C) gemessen, sondern in Fahrenheit (°F). Das ist historisch bedingt. Im Jahr 1714 definierte der Physiker Gabriel Daniel Fahrenheit seine Temperaturskala. Als Nullpunkt legte er die tiefste Temperatur fest, die er mit einer Mischung aus Eis, Wasser und Salmiak erzeugen konnte, nämlich -17,78 °C. Der Gefrierpunkt von Wasser liegt in der Fahrenheitskala bei 32 °F, der Siedepunkt von Wasser bei 212 °F.

Im Internet findet man unter www.umrechnung.org, dass z. B. 35°C in 95°F umgerechnet werden.



Arbeitsauftrag

Finden Sie jeweils eine Funktion mit linearer Skalierung, mit der man °C in °F umrechnen kann und umgekehrt. Stellen Sie die Funktionen graphisch in einem Diagramm dar und überprüfen Sie die Beispielrechnung aus dem Internet.

Lösung

Celsiuskala: $C_1(0/32)$; $C_2(100/212)$

Lineare Funktion:

$$g_C(x) = \frac{212 - 32}{100} \cdot x + 32 = \frac{9}{5}x + 32$$

Fahrenheitskala: $F_1(32/0)$; $F_2(212/100)$

Lineare Funktion:

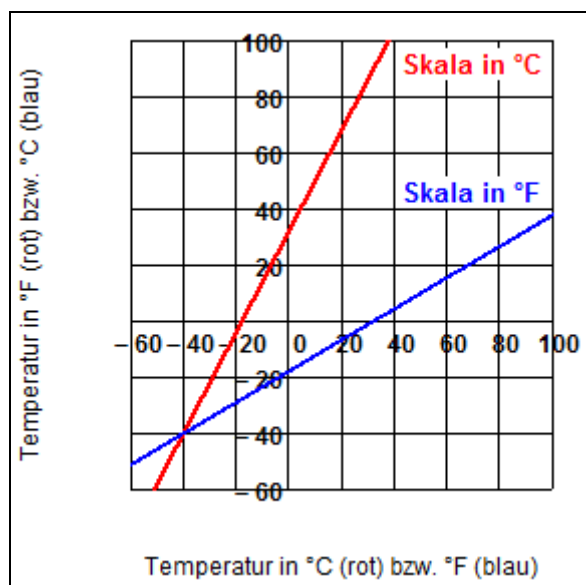
$$g_F(x) = \frac{100}{212 - 32} \cdot (x - 32) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$$

Überprüfung der Celsiusskala:

$$g_C(x) = \frac{9}{5} \cdot 35 + 32 = 63 + 32 = 95$$

Überprüfung der Fahrenheitskala:

$$g_F(x) = \frac{5}{9} \cdot 95 - \frac{160}{9} = \frac{475 - 160}{9} = \frac{315}{9} = 35$$



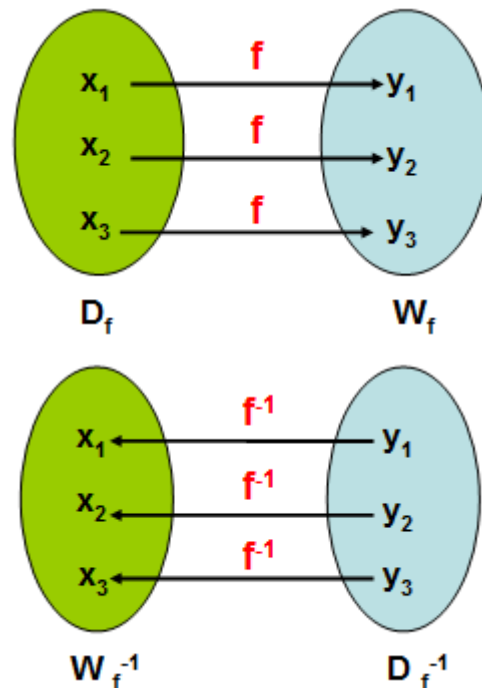
2 Der Begriff Umkehrfunktion

Gegeben ist eine Funktion f mit

$$f: D_f \rightarrow W_f$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

mit **eindeutiger** Zuordnungsvorschrift.



Dann existiert die **umgekehrte Zuordnung**, die **Umkehrfunktion**:

$$f^{-1}: W_f \rightarrow D_f$$

$$y \mapsto x = f(y)$$

Formale Schreibweise:

$$u: D_u \rightarrow W_u$$

$$x \mapsto y = u(x)$$

Satz 1

Jede injektive Funktion f (jedes Bild hat genau ein Urbild) besitzt eine Umkehrfunktion f^{-1} .

Satz 2

Jede streng monotone Funktion ist in ihrer Wertemenge umkehrbar.

Allgemeine Berechnung des Funktionsterms der Umkehrfunktion

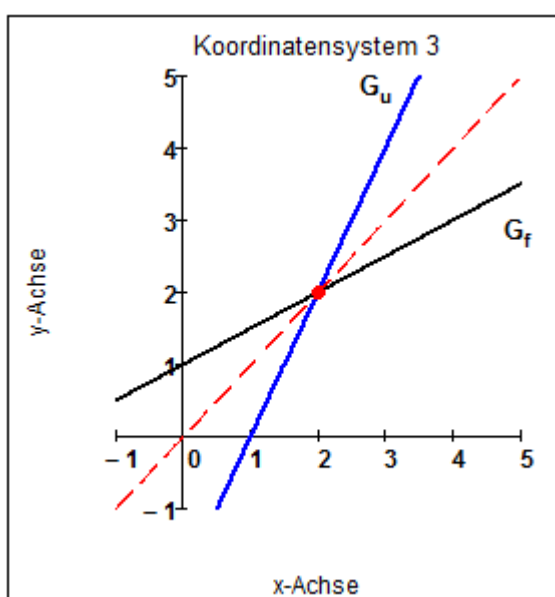
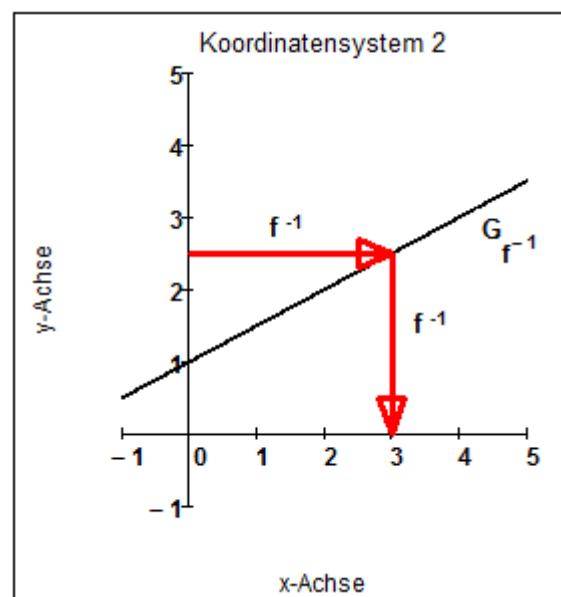
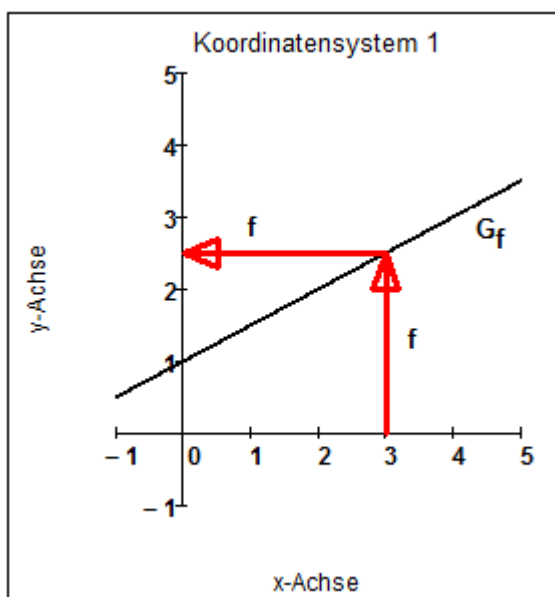
1. Nachweis der Monotonieeigenschaft von f .
2. Bestimmung der Wertemenge von f .
3. Berechnung des Funktionsterms von $f^{-1}(x) = u(x)$.
Vertauschung der Variablen, also $x = f(y)$, und Auflösen nach y .
4. Angabe von $f^{-1}(x) = u(x)$ mit Definitions- und Wertemenge.

3 Die Umkehrfunktion der linearen Funktion

Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ und $x \in \mathbb{R}$.

- Tragen Sie den Graphen von f in das Koordinatensystem 1 ein. Kennzeichnen Sie die Richtung der Zuordnung f .
- Tragen Sie den Graphen von f in das Koordinatensystem 2 ein. Kennzeichnen Sie die Richtung der umgekehrten Zuordnung f^{-1} .
- Üblicherweise liegt die Definitionsmenge auf der x -Achse und die Wertemenge auf der y -Achse. Bestimmen Sie den Funktionsterm der Umkehrfunktion u durch Vertauschung der Variablen und tragen Sie die Graphen von Funktion f und Umkehrfunktion u in das Koordinatensystem 3 ein.
- Markieren Sie den Punkt, für den die Funktionswerte gleich sind und überprüfen Sie rechnerisch. Welche geometrische Besonderheit ergibt sich zwischen den Graphen?



Funktionsgleichung: $y = 0,5x + 1$

$D_f = [0,5;4]$; $f(0,5) = 1,25$; $f(4) = 3$;

Wertemenge: $W_f = [1,25;3]$

Vertauschen der Variablen: $x = 0,5y + 1$

Auflösen nach y : $y = 2 \cdot (x - 1)$

Umkehrfunktion: $u(x) = 2 \cdot (x - 1)$

$P(2/2)$ ist gemeinsamer Punkt.

Überprüfung: $f(x) = u(x)$

$$0,5x + 1 = 2x - 2$$

$$-1,5x = -3 \Rightarrow x = 2$$

Die Graphen von Funktion f und Umkehrfunktion u sind symmetrisch bzgl. der Winkelhalbierenden $y = x$.

4 Die Umkehrfunktion der quadratischen Funktion

Beispiel 1

Gegeben ist der Graph der Funktion f sowie der Funktionsterm mit $f(x) = x^2 - x + \frac{7}{4}$ und $x \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie das Intervall, in dem die Funktion f umkehrbar ist und geben Sie die Wertemenge an.
- Bestimmen Sie rechnerisch die Term der Umkehrfunktionen und geben Sie die jeweils Definitions- und Wertemenge an.
- Markieren Sie den jeweils umkehrbaren Teil des Funktionsgraphen und zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion.

Lösung zu a)

Ableitungsfunktion: $f'(x) = 2x - 1$;

Bestimmung des Scheitels: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_s = 0,5$; $y_s = f(0,5) = 1,5$

G_f ist streng monoton fallend für $x \in]-\infty; 0,5]$, $W_1 = [1,5; \infty[$

G_f streng monoton steigend für $x \in [0,5; \infty[$, $W_2 = [1,5; \infty[$

Lösung zu b)

Funktionsgleichung: $y = x^2 - x + \frac{7}{4}$; Vertauschung der Variablen: $x = y^2 - y + \frac{7}{4}$

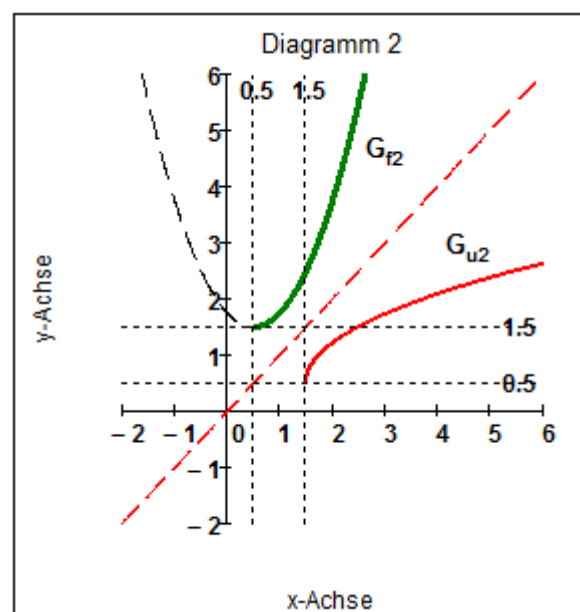
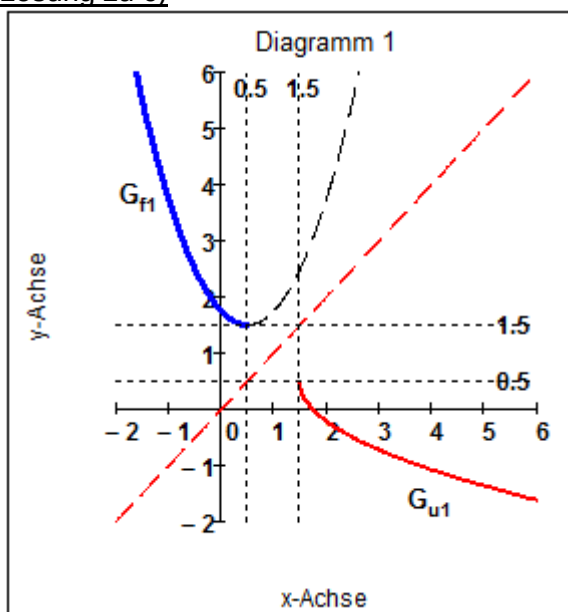
Auflösen nach y : $y^2 - y + \frac{7}{4} - x = 0$; $y_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (1,75 - x)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{4x - 6}}{2} = 0,5 \pm \sqrt{x - 1,5}$

Umkehrfunktionen:

Monoton fallender Zweig: $D_{u_1} = [1,5; \infty[$; $W_{u_1} =]-\infty; 0,5]$; $u_1(x) = 0,5 - \sqrt{x - 1,5}$

Monoton steigender Zweig: $D_{u_2} = [1,5; \infty[$; $W_{u_2} = [0,5; \infty[$; $u_2(x) = 0,5 + \sqrt{x - 1,5}$

Lösung zu c)



Beispiel 2

Gegeben ist der Graph der Funktion f sowie der Funktionsterm mit $f(x) = -x^2 - 2x + 2$ und $x \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie das Intervall, in dem die Funktion f umkehrbar ist und geben Sie die Wertemenge an.
- Bestimmen Sie rechnerisch die Term der Umkehrfunktionen und geben Sie die jeweils Definitions- und Wertemenge an.
- Markieren Sie den jeweils umkehrbaren Teil des Funktionsgraphen und zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion.

Lösung zu a)

Funktionsgleichung: $y = -x^2 - 2x + 2$; Vertauschung der Variablen: $x = -y^2 - 2y + 2$

Auflösen nach y : $y^2 + 2y + x - 2 = 0$;

$$y_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (x-2)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12 - 4x}}{2} = -1 \pm \sqrt{3-x}$$

Umkehrfunktionen:

Monoton steigender Zweig: $D_{u_1} =]-\infty; 3]$; $W_{u_1} =]-\infty; -1]$; $u_1(x) = -1 - \sqrt{3-x}$

Monoton fallender Zweig: $D_{u_2} =]-\infty; 3]$; $W_{u_2} = [-1; \infty[$; $u_2(x) = -1 + \sqrt{3-x}$

Lösung zu b)

Ableitungsfunktion: $f'(x) = 2x - 1$; $f'(x) = -2x - 2$

Bestimmung des Scheitels: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x - 2 \Leftrightarrow x_s = -1$; $y_s = f(-1) = 3$

G_f ist streng monoton steigend für $x \in]-\infty; -1]$, $W_1 =]-\infty; 3]$

G_f streng monoton fallend für $x \in [-1; \infty[$, $W_2 = [-1; 3]$

Lösung zu c)