Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2013

- **Mathematik 12 Nichttechnik - A I - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben sind die reellen Funktionen f mit dem Funktionsterm $f_a(x) = \frac{1}{12}\cdot\left(x^3 - 2\cdot a\cdot x^2 + a^2\cdot x\right)$,

wobei **x, a** $\in$ **IR** und $a \geq 0$.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)
Bestimmen Sie die Nullstellen von f_a sowie deren Vielfachheit in Abhängigkeit von a.

$$f_a(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^3 - 2\cdot a\cdot x^2 + a^2\cdot x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\cdot\left(x^2 - 2\cdot a\cdot x + a^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad x\cdot(x - a)^2 = 0$$

$a \neq 0 \quad\Rightarrow\quad x_1 = 0$ einfache Nullstelle $\quad x_2 = a$ zweifache Nullstelle

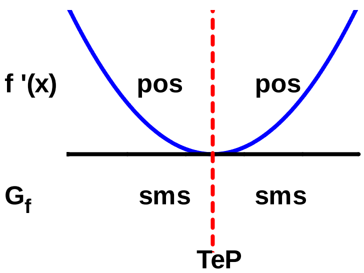
$a = 0 \quad\Rightarrow\quad x_1 = 0$ dreifache Nullstelle

Teilaufgabe 1.2 (9 BE)
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a Art und Koordinaten der Punkte des Graphen von f_a mit waagrechter Tangente.

$$f(x,a) := \frac{1}{12}\cdot\left(x^3 - 2\cdot a\cdot x^2 + a^2\cdot x\right) \qquad f'(x,a) := \frac{1}{12}\cdot\left(3\cdot x^2 - 4\cdot a\cdot x + a^2\right)$$

$$f'(x,a) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 3\cdot x^2 - 4\cdot a\cdot x + a^2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ \frac{a}{3} \end{pmatrix}$$

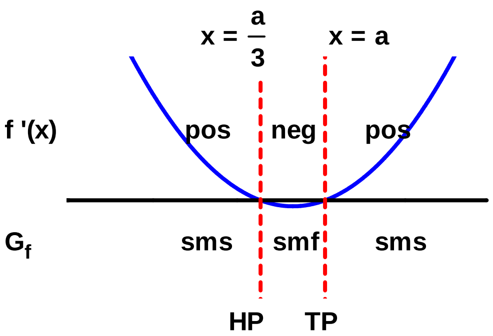
1. Fall: $a = 0$



$f(0,0) = 0$

Terrassenpunkt: **TeP(0/0)**

2. Fall: $a > 0$



$$f\left(\frac{a}{3}, a\right) = \frac{a^3}{81}$$

Hochpunkt: $\mathbf{HP\left(\frac{a}{3} \,/\, \frac{a^3}{81}\right)}$

$$f(a, a) = 0$$

Tiefpunkt: **TP(a/0)**

Für alle folgenden Teilaufgaben ist a = 6: $f_6(x) = \frac{1}{12}\cdot x^3 - x^2 + 3\cdot x$

f_6 wird im Folgenden kurz mit f bezeichnet.

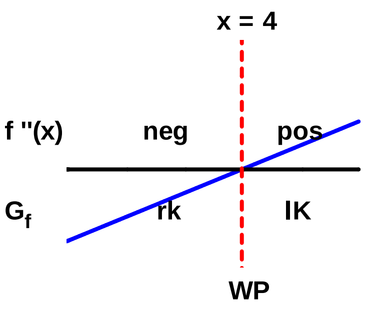
Teilaufgabe 1.3 (6 BE)
Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle und berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen G_f.

Funktionsterm: $f(x) := \frac{1}{12}\cdot x^3 - x^2 + 3\cdot x$

1. Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) = \frac{x^2}{4} - 2\cdot x + 3$

2. Ableitung: $f''(x) := \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{x}{2} - 2$

Flachstelle: $f''(x) = 0 \rightarrow \frac{x}{2} - 2 = 0$ auflösen, $x \rightarrow 4$



Maximale Krümmungsintervalle:

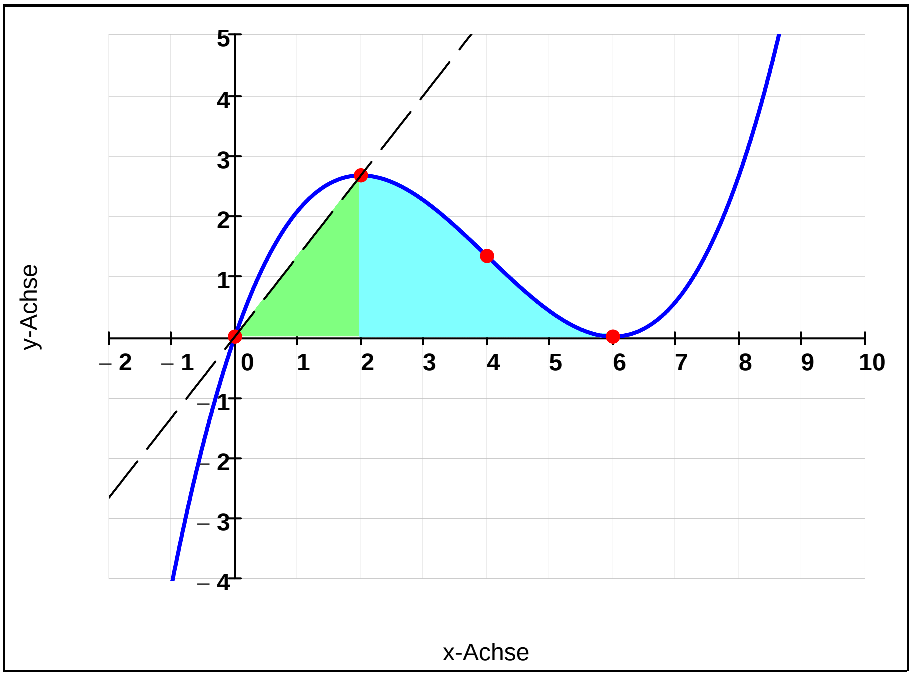
G_f ist rechtsgekrümmt in $x \in \,]-\infty\,;\,4\,]$ und

G_f ist linksgekrümmt in $x \in [\,4\,;\,\infty\,[$.

$$f(4) = \frac{4}{3}$$

Wendepunkt: $\mathbf{WP\left(4 \,/\, \frac{4}{3}\right)}$

Teilaufgabe 1.4 **(4 BE)**
Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f für $-1 \le x \le 8$ in ein Koordinatensystem.



Teilaufgabe 1.5 **(3 BE)**
Gegeben ist weiterhin die Ursprungsgerade G_g, welche den Graphen G_f im Hochpunkt HP(2/y_P) schneidet. Zeichnen Sie die Gerade in das vorhandene Koordinatensystem ein und bestimmen Sie ihre Gleichung.

$$g(x,a,b) := a \cdot x + b$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} g(0,a,b) = 0 \\ g(2,a,b) = f(2) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b = 0 \\ 2 \cdot a + b = \frac{8}{3} \end{pmatrix} \text{ auflösen}, a, b \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Ursprungsgerade: $g(x) := g(x, a_0, b_0) = \frac{4 \cdot x}{3}$

Teilaufgabe 1.6 **(6 BE)**
Die Gerade G_g, die x-Achse und der Graph von f schließen im I. Quadranten ein Flächenstück ein. Markieren Sie diese Fläche im vorhandenen Koordinatensystem und berechnen Sie die zugehörige Flächenmaßzahl.

1. Teilfläche: $A_1 := \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot f(2)$ $\qquad A_1 = \frac{8}{3}$

Stammfunktion: $\int f(x)\,dx = \frac{x^4}{48} - \frac{x^3}{3} + \frac{3 \cdot x^2}{2}$

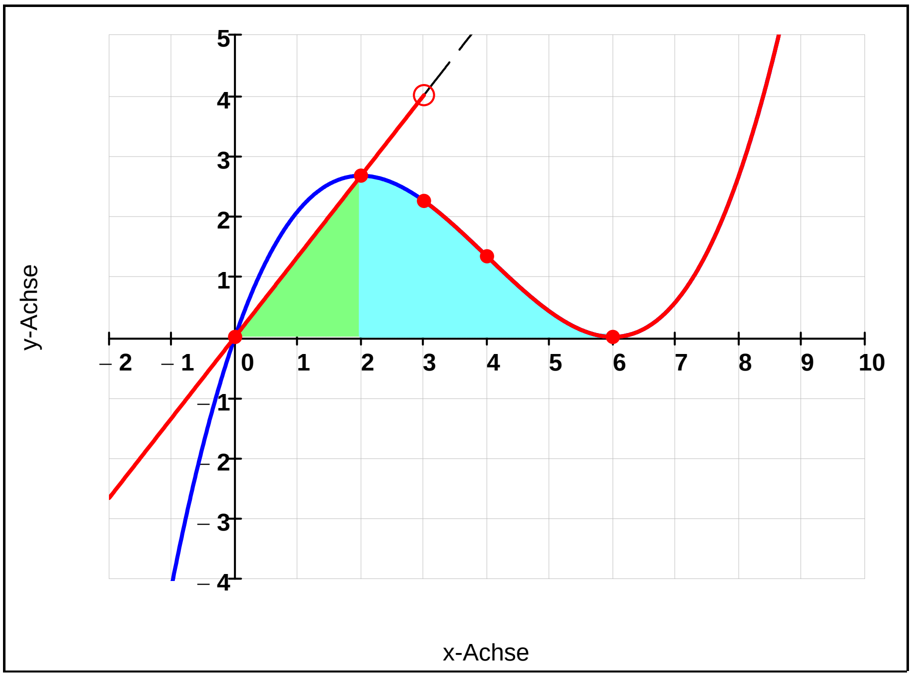
2. Teilfläche: $A_2 := \int_2^6 f(x)\,dx$ $\qquad A_2 = \frac{16}{3}$

Gesamtfläche: $A_{ges} := A_1 + A_2 = 8$

Teilaufgabe 1.7 **(6 BE)**
Gegeben ist nun die abschnittsweise definierte Funktion h durch

$$h(x) = \begin{cases} \left(\frac{4}{3} \cdot x\right) & \text{if } x < 3 \\ f(x) & \text{if } x \geq 3 \end{cases}$$

Markieren Sie G_h im vorhandenen Diaramm mit Farbe. Treffen Sie mithilfe des Graphen G_h eine Aussage über Stetigkeit und Differenzierbarkeit von h an der Nahtstelle.
Belegen Sie anschließend Ihr Erebnis rechnerisch.



Der Graph von h ist an der Stelle $x_0 := 3$ nicht stetig und damit auch nicht differenzierbar.

Rechnerische Überprüfung:

$$\lim_{x \to 3^-} \left(\frac{4}{3} \cdot x \right) \to 4$$

$\Rightarrow$ nicht stetig, also auch nicht differenzierbar.

$$\lim_{x \to 3^+} \left(\frac{1}{12} \cdot x^3 - x^2 + 3 \cdot x \right) \to \frac{9}{4}$$

Teilaufgabe 2.0
Von einer ganzrationalen Funktion k mit der Definitionsmenge $D_k = IR$ ist Folgendes bekannt.

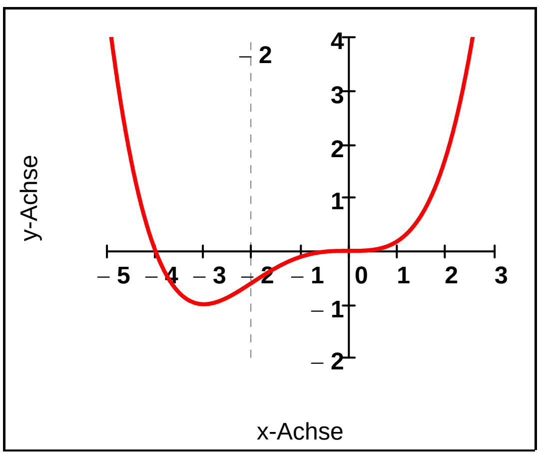
$k''(x) > 0$ für $x \in]-\infty ; -2[$ sowie für $x \in]0 ; \infty[$
$k''(x) < 0$ für $x \in]-2 ; 0[$
$k'(0) = 0 \wedge k''(0) = 0 \wedge k'''(0) \neq 0$

Teilaufgabe 2.1 **(5 BE)**
Beschreiben Sie die daraus resultierenden Eigenschaften des Graphen G_k in Worten.

G_k ist linksgekrümmt für $x \in]-\infty ; -2[$ und für $x \in]-2 ; 0[$,
G_k ist rechtsgekrümmt für $x \in]-2 ; 0[$.

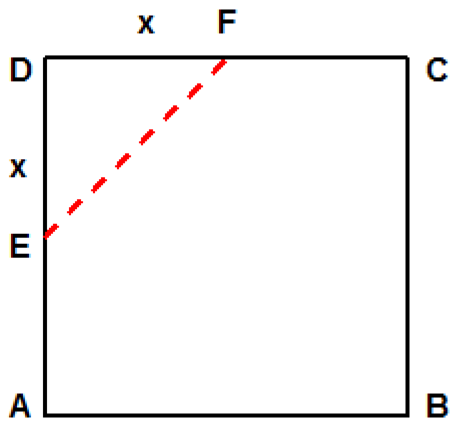
G_k hat einen Terrassenpunkt an der Stelle $x = 0$.

Teilaufgabe 2.2 **(3 BE)**
Fertigen Sie mithilfe der bisherigen Angaben und Ergebnisse eine aussagekräftige Skizze von G_k an, wenn der Graph durch den Ursprung verläuft, einen Tiefpunkt bei $x = -3$ besitzt und die Funktion den Grad 4 hat.



Teilaufgabe 3.0
Bei einem Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a wird von der Ecke D ausgehend je eine Strecke der Länge x mit $\mathbf{0 < x < a}$ in Richtung A bis zum Punkt E und in Richtung C bis zum Punkt F abgetragen. Dann wird das Quadrat längs EF so gefaltet, dass das Dreieck FDE senkrecht zum ursprünglichen Quadrat steht. Die hochstehende Ecke D bildet mit den Punkten A, B, C, F und E eine Pyramide mit fünfeckiger Grundfläche.

Teilaufgabe 3.1 (2 BE)
Fertigen Sie eine Skizze des Quadrats ABCD mit den in 3.0 gegebenen Punkten und Strecken an.



Teilaufgabe 3.2 (4 BE)
Stellen Sie das Volumen $\mathbf{V_a(x)}$ der entstehenden Pyramide in Abhängigkeit von x dar. Die Höhe der Pyramide h ist gegeben durch $\mathbf{h = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x}$.

[Mögliches Ergebnis: $\mathbf{V_a(x) = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(2 \cdot a^2 \cdot x - x^3\right)}$]

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$$

Grundfläche: $\quad G = a \cdot a - \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = a^2 - \frac{1}{2} \cdot x^2$

Volumen: $\quad V(x, a) := \frac{1}{3} \cdot \left(a^2 - \frac{1}{2} \cdot x^2\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x\right) = \frac{\sqrt{2} \cdot a^2 \cdot x}{6} - \frac{\sqrt{2} \cdot x^3}{12}$

Teilaufgabe 3.3 (7 BE)
Bestimmen Sie x so, dass das Volumen der Pyramide den absolut größten Wert annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall und mit $\mathbf{a = 3}$ Volumen und Höhe der Pyramide.

1. Ableitung: $\quad V'(x, a) := \frac{d}{dx} V(x, a) = \frac{\sqrt{2} \cdot a^2}{6} - \frac{\sqrt{2} \cdot x^2}{4}$

Horizontale Tangenten:

$$V'(x,a) = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}\cdot a^2}{6} - \frac{\sqrt{2}\cdot x^2}{4} = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot a}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot a}{3} \end{pmatrix}$$

Relative Extremstellen: $x_1(a) := -\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot a$ nicht definiert $x_2(a) := \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot a$

Funktionswert: $V(x_2(a), a) = \frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot a^3}{27}$

Vergleich mit den Randwerten:

Linker Rand: $\lim_{x \to 0^+} \left[\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\left(2\cdot a^2\cdot x - x^3\right)\right] \rightarrow 0$

Rechter Rand: $\lim_{x \to 0^-} \left[\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\left(2\cdot a^2\cdot x - x^3\right)\right] \rightarrow 0$

Absolutes Maximum: $y_{max}(a) := V(x_2(a), a) \rightarrow \frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot a^3}{27}$

$x_{max}(a) := x_2(a) \rightarrow \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot a}{3}$

$x_{max}(3) \rightarrow \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$

Max. Volumen: $V(x_{max}(3), 3) = 2\cdot\sqrt{3}$

Höhe. $h(x) := \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x$ $h(x_{max}(3)) = \sqrt{3}$

Kantenlänge: $a := 6$ Schnitt: $x0 := 4$