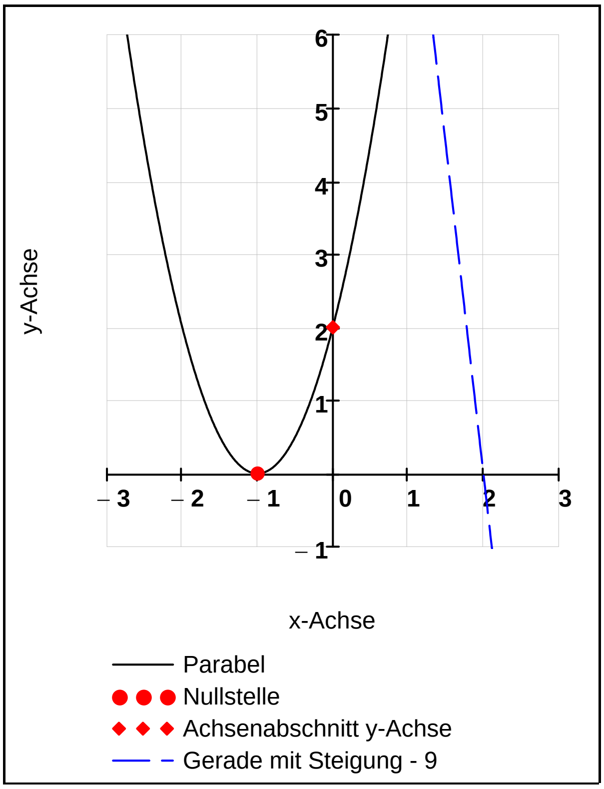
Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2013

- ## Mathematik 12 Nichttechnik - A II - Lösung

Teilaufgabe 1.0
Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f mit der Definionsmenge $\mathbf{D_f = IR}$ berührt die x-Achse bei $\mathbf{x = -1}$ und schneidet die y-Achse bei $\mathbf{y = 2}$. Die Tangente an den Graphen G_f für $\mathbf{x = 2}$ hat die Steigung $\mathbf{m = -9}$.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)
Begründen Sie, dass die zugehörige ganzrationale Funktion nicht 2. Grades sein kann.

Berühren auf der x-Achse heißt Scheitel auf der x-Achse.
Der Achsenabschnitt ist positiv, also müsste die Parabel nach oben geöffnet sein.
Die Steigung könnte rechts vom Scheitel also nicht, wie verlangt, negativ sein.
Keine Parabel möglich.



Teilaufgabe 1.2 (7 BE)
Bestimmen Sie den Funktionsterm f(x) der ganzrationalen Funktion 3. Grades.
[Ergebnis: $\mathbf{f(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2}$]

Funktionsterm: $\mathbf{f(x, a, b, c, d) := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d}$

Ableitung: $\mathbf{f'(x, a, b, c, d) := \frac{d}{dx} f(x, a, b, c, d) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c}$

Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{pmatrix} f(-1,a,b,c,d) = 0 \\ f(0,a,b,c,d) = 2 \\ f'(-1,a,b,c,d) = 0 \\ f'(2,a,b,c,d) = -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b - a - c + d = 0 \\ d = 2 \\ 3\cdot a - 2\cdot b + c = 0 \\ 12\cdot a + 4\cdot b + c = -9 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(-1,a,b,c,d) = 0 \\ f(0,a,b,c,d) = 2 \\ f'(-1,a,b,c,d) = 0 \\ f'(2,a,b,c,d) = -9 \end{pmatrix} \text{auflösen}, a, b, c, d \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Konkreter Funktionsterm: $f(x, a_0, b_0, c_0, d_0) = 3\cdot x - x^3 + 2$

Feste Definition: $f(x) := -x^3 + 3\cdot x + 2$

Teilaufgabe 1.3 **(8 BE)**
Weisen Sie durch entsprechende Berechnungen nach, dass die Gerade G_g mit $g(x) := 4$ Tangente an den Graphen G_f im Hochpunkt von G_f ist und ermitteln Sie die Koordinaten des weiteren gemeinsamen Punktes von G_g und G_f.

1. Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) = 3 - 3\cdot x^2$

2. Ableitung: $f''(x) := \frac{d}{dx} f'(x) = -6\cdot x$

Horizontale Tangenten: $f'(x) = 0 \rightarrow 3 - 3\cdot x^2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Art der relativen Extremstelle:

$f''(1) = -6$ < 0, also Hochpunkt

$f''(-1) = 6$ > 0, also Tiefpunkt

$f(1) = 4 \quad \Rightarrow \quad g(x) = 4$ ist horizontale Tangente im Hochpunkt

$g \cap f$: $g(x) = f(x) \rightarrow 4 = 3\cdot x - x^3 + 2$

Hilfsfunktion: $d(x) := g(x) - f(x) \rightarrow x^3 - 3\cdot x + 2$

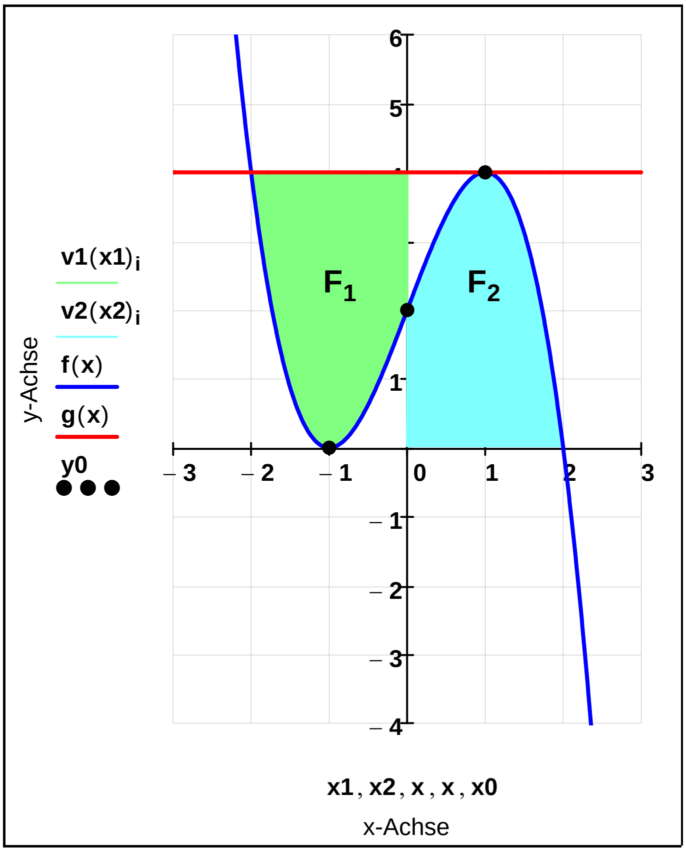
$\mathbf{d(1) = 0}$ $\Rightarrow$ Polynomdivision

$$p(x) := \frac{x^3 - 3 \cdot x + 2}{x - 1} \text{ parfrac}, x \rightarrow x^2 + x - 2$$

$$p(x) = 0 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$ weiterer gemeinsamer Punkt

$g(-2) = 4$ Schnittpunkt: S(-2 / 4)

Teilaufgabe 1.4 **(4 BE)**
Zeichnen Sie den Graphen G_f sowie die Gerade G_g im Bereich $-2 \le x \le 2$ mithilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem.



Teilaufgabe 1.5 (4 BE)
Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts für das Flächenstück F_1, welches der Graph G_f und die Gerade G_g mit der y-Achse im II. Quadranten einschließen.

Stammfunktion: $\int (4 - f(x))\,dx \rightarrow \frac{x^4}{4} - \frac{3 \cdot x^2}{2} + 2 \cdot x$

Fläche: $F_1 := \int_{-2}^{0} (4 - f(x))\,dx$ $\quad F_1 = 6$

Teilaufgabe 1.6 (5 BE)
Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts für das Flächenstück F_2, welches der Graph G_f mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten einschließt. Vergleichen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts von F_1 und F_2. Welche Vermutung legt das Ergebnis bezüglich des Punktes P(0/2) nahe?

Stammfunktion: $\int f(x)\,dx \rightarrow \frac{3 \cdot x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + 2 \cdot x$

Fläche: $F_2 := \int_{0}^{2} f(x)\,dx$ $\quad F_2 = 6$

Es gilt: $F_1 = F_2$

Der Graph von f liegt punktsymmetrisch zum Punkt (0/2).

Teilaufgabe 2.0
Gegeben sind die reellen Funktionen $f_t(x) = -(x+1)^2 \cdot (x - t)$; $D_{f_1} = \mathbb{R}$; $t \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)
Bestimmen Sie die Nullstellen von f_t sowie deren Vielfachheit in Abhängigkeit von t.

$f_t(x, t) := -(x+1)^2 \cdot (x - t)$

Nullstellen:

$t \neq -1$	$x_{12} = -1$	zweifach	$x_3 = t$	einfach
$t = -1$	$x_{12} = -1$	dreifach		

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)
Argumentieren Sie mithilfe der bisher bekannten Eigenschaften, dass die Funktion f aus Aufgabe 1 zur Funktionenschar f_t gehört.

Faktorisieren: $f(x) = 3\cdot x - x^3 + 2$ **Faktor** $= -(x-2)\cdot(x+1)^2$

Vgl. Scharkurve für $t = 1$: $f_t(x,1) = -(x-1)\cdot(x+1)^2$

Teilaufgabe 3 (7 BE)
Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion h durch

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x < 0 \\ \frac{-1}{2}\cdot(x-1)^2 + \frac{5}{2} & \text{if } x \ge 0 \end{cases}$$

mit f(x) aus 1.2.
Weisen Sie nach, dass die Funktion h an der Nahtstelle stetig ist. Untersuchen Sie anschließend rechnerisch, ob der Graph von h an dieser Stelle *ohne Knick* verkäuft.

Linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to 0^-} \left(-x^3 + 3\cdot x + 2\right) \to 2$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to 0^+} \left[\frac{-1}{2}\cdot(x-1)^2 + \frac{5}{2}\right] \to 2$

Funktionswert: $h_2(x) := \frac{-1}{2}\cdot(x-1)^2 + \frac{5}{2}$ $\qquad h_2(0) = 2$

$\Rightarrow$ G_h ist an der Stelle $x = 0$ stetig.

Ableitungsfunktion:

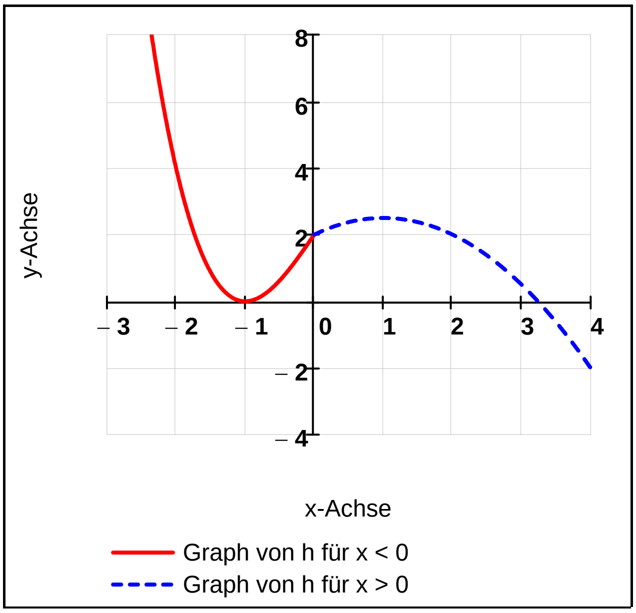
$h_2(x) = x - \frac{x^2}{2} + 2$ $\qquad h'_2(x) := \frac{d}{dx}h_2(x) = 1 - x$

Linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to 0^-} \left(3 - 3\cdot x^2\right) \to 3$

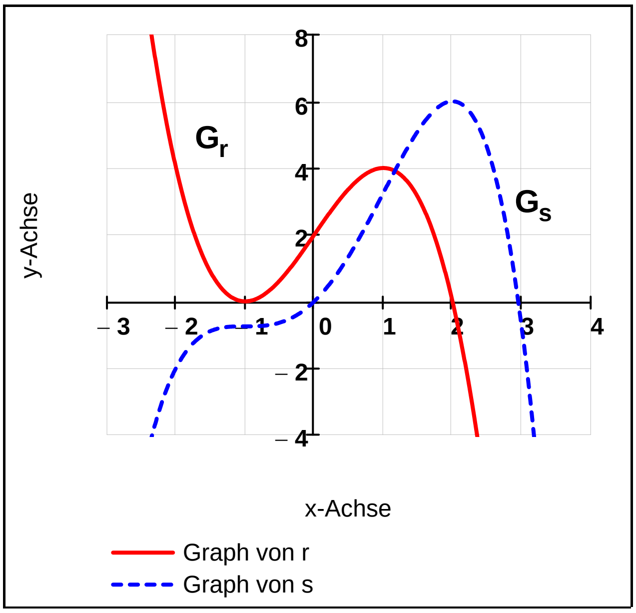
Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to 0^+} (1 - x) \to 1$

$\Rightarrow$ G_h ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar.

Graphische Darstellung in der Prüfung nicht verlangt.



Teilaufgabe 4 (5 BE)
Die folgende Darstellung zeigt den Graphen G_r der ganzrationalen Funkion r und den Graphen G_s der ganzrationalen Funktion s.
Begründen Sie: Die Funktion s kann eine Stammfunktion der Funktion r sein.



Es muss gelten: $\mathbf{s'(x) = r(x)}$

$\mathbf{r(x) > 0}$ für $\mathbf{x \in \,]-\infty\,;2\,]}$,
also G_s ist streng monoton steigend

$\mathbf{r(x) < 0}$ für $\mathbf{x \in [\,2\,;\infty\,[}$,
also G_s ist streng monoton fallend

Teilaufgabe 5.0
Eine Schule veranstaltet eine Projektwoche zum Thema *Work-Life-Balance.* Zum Abschluss erhalten alle Teilnehmer je einen Relax-Ball, der in einer zylinderförmigen Schachtel verpackt ist.

Von dieser ist bekannt, dass sie eine Oberfläche von 180 cm^2 besitzt. Bei der Rechnung wird auf Einheiten verzichtet.

Teilaufgabe 5.1 (4 BE)
Zeigen Sie, dass für das Volumen der Schachtel in Abhängigkeit vom Zylinderradius r gilt:

$V(r) = -\pi \cdot r^3 + 90 \cdot r$

Oberfläche Zylinder: $O_{Zyl} = 2 \cdot \text{Kreisfläche} + \text{Mantelfläche}$

$$O_{Zyl} = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h \overset{!}{=} 180$$

Auflösen nach der Höhe: $h = \dfrac{180 - 2 \cdot r^2 \cdot \pi}{2 \cdot r \cdot \pi} = \dfrac{90}{r \cdot \pi} - r$

Volumen der Schachtel: $V_{Zyl} = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$

$$V_{Zyl} = r^2 \cdot \pi \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{90}{r \cdot \pi} - r \right) = 90 \cdot r - r^3 \cdot \pi$$

Teilaufgabe 5.2 (5 BE)
Nach Informationen des Verbraucherschutzes kann eine Verpackung dann als unzulässig deklariert werden, wenn die Füllmenge vom Fassungsvermögen einer Verpackung um mehr als 30% abweicht. Prüfen Sie, ob eine Verpackung dieser Anforderung gerecht wird, wenn die Schachtel mit $r = 3.1 \cdot cm$ einen Ball mit dem Durchmesser von $60 \cdot mm$ enthält. Runden Sie alle Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

Schachtelvolumen: $V_{Zyl}(r) := 90 \cdot r - r^3 \cdot \pi$ $\qquad V_{Zyl}(3.1) = 185.41$

Kugelvolumen: $V_{Kugel}(r) := \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ $\qquad V_{Kugel}(3) = 113.10$

Abweichung: $\dfrac{V_{Zyl}(3.1) - V_{Kugel}(3)}{V_{Zyl}(3.1)} = 0.39$

In der Verpackung ist 39% Luft, erfüllt also die Anforderungen vom Verbraucherschutz nicht.