Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2013

- **Mathematik 13 Technik - A II - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion f_a mit dem Funktionsterm $f_a(x) = \left(x^2 - a^2\right)\cdot e^{-a\cdot x}$ mit der Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1.1 **(2 BE)**

Bestimmen Sie die Nullstellen von f_a und deren Anzahl jeweils in Abhängigkeit von a.

$$f_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2 - a^2\right)\cdot e^{-a\cdot x} = 0$$

$e^{-a\cdot x} \neq 0$ für alle x. $\qquad x^2 - a^2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$

$a \neq 0$ zwei einfache Nullstellen $x_1 = a$ $\quad x_2 = -a$

$a = 0$ eine zweifache Nullstelle $x_{12} = 0$

Teilaufgabe 1.2 **(10 BE)**

Zeigen Sie, dass der Graph von f_a für $a \neq 0$ genau zwei lokale Extrempunkte besitzt. Ermitteln Sie das Monotonieverhalten sowie die Abszissen und die Art der Extrempunkte des Graphen von f_a für alle $a \in \mathbb{R}$.

[Zwischenergebnis: $f'_a(x) = \left(-a\cdot x^2 + 2\cdot x + a^3\right)\cdot e^{-a\cdot x}$]

$$f'_a(x) = 2\cdot x\cdot e^{-a\cdot x} + \left(x^2 - a^2\right)\cdot\left(-a\cdot e^{-a\cdot x}\right) = \left(-a\cdot x^2 + 2\cdot x + a^3\right)\cdot e^{-a\cdot x}$$

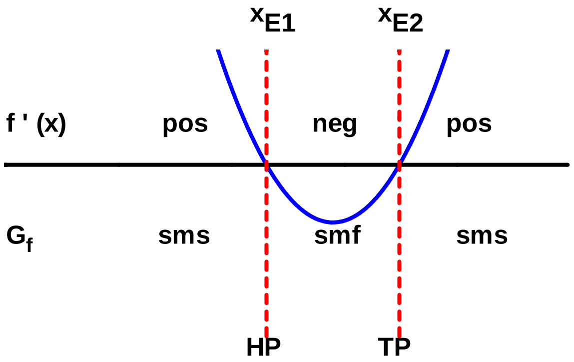
$$f'_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(-a\cdot x^2 + 2\cdot x + a^3\right)\cdot e^{-a\cdot x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -a\cdot x^2 + 2\cdot x + a^3 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{a^4 + 1} + 1}{a} \\ -\dfrac{\sqrt{a^4 + 1} - 1}{a} \end{pmatrix}$$

$a^4 + 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ es gibt zwei lokale Extrempunkte

$$x_{E1} = \frac{\sqrt{a^4 + 1} + 1}{a} \qquad x_{E2} = -\frac{\sqrt{a^4 + 1} - 1}{a}$$

$a < 0 \quad \Rightarrow \quad x_{E1} < 0 \qquad \sqrt{a^4 + 1} - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_{E2} > 0$



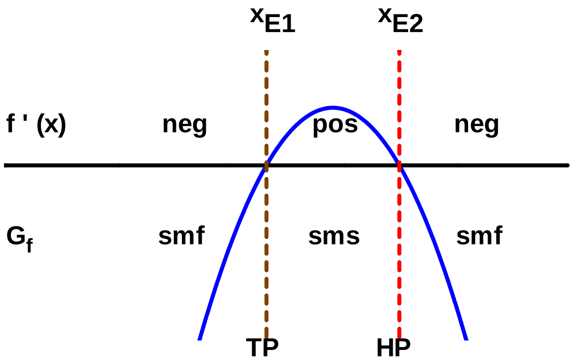
Hochpunkt:

$$x_{E1} = \frac{\sqrt{a^4 + 1} + 1}{a}$$

Tiefpunkt:

$$x_{E2} = -\frac{\sqrt{a^4 + 1} - 1}{a}$$

$a > 0 \qquad \sqrt{a^4 + 1} - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_{E2} < 0 \quad \Rightarrow \quad x_{E1} > 0$



Tiefpunkt:

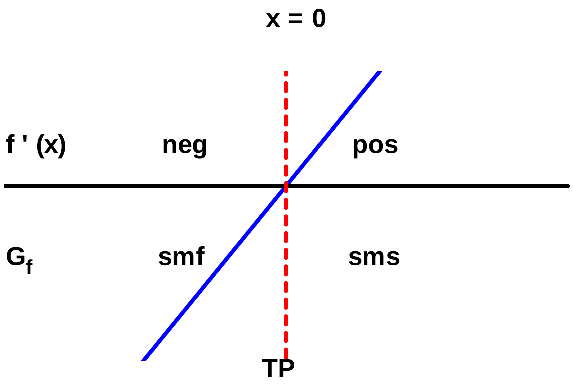
$$x_{E1} = -\frac{\sqrt{a^4 + 1} - 1}{a}$$

Hochpunkt:

$$x_{E2} = \frac{\sqrt{a^4 + 1} + 1}{a}$$

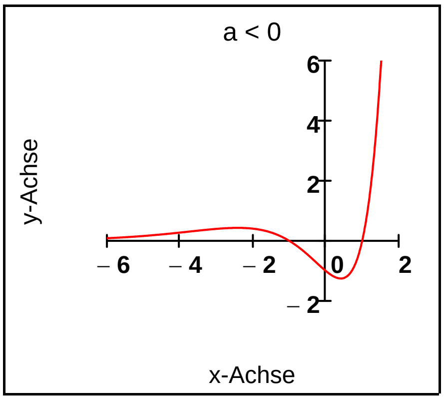
$f'(x, a) := \left(-a \cdot x^2 + 2 \cdot x + a^3\right) \cdot e^{-a \cdot x} \qquad f'(x, 0) = 2 \cdot x$

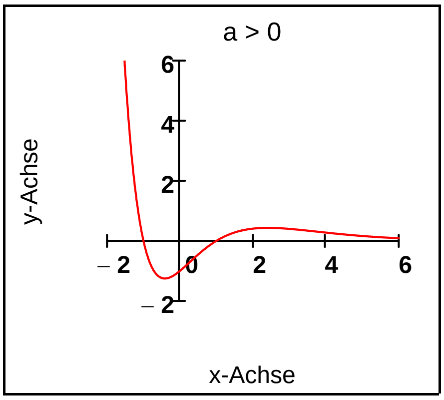
$a = 0$

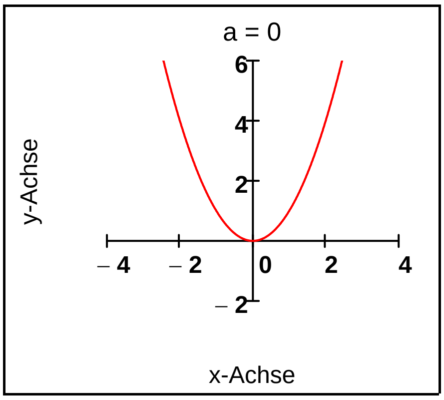


Tiefpunkt: $x = 0$

$$f(x,a) := \left(x^2 - a^2\right)\cdot e^{-a\cdot x}$$







Für die folgenden Teilaufgaben gilt **a = 1**.

Teilaufgabe 1.3 (6 BE)
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_1(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge und geben Sie die Gleichung der Asymptote und die Abszissen der Extrempunkte des Graphen von f_1 an. Zeichnen Sie den Graphen von f_1 im Bereich $-1.5 \le x \le 6$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (1 LE = 1 cm)

$$f_1(x) := f(x,1) = e^{-x}\cdot\left(x^2 - 1\right)$$

Bezeichnung: $f(x) := f_1(x)$

Verhalten am Rand der Definitionsmenge:

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{e^{-x}}}\cdot\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{\left(x^2 - 1\right)}}\right] \to \infty$$

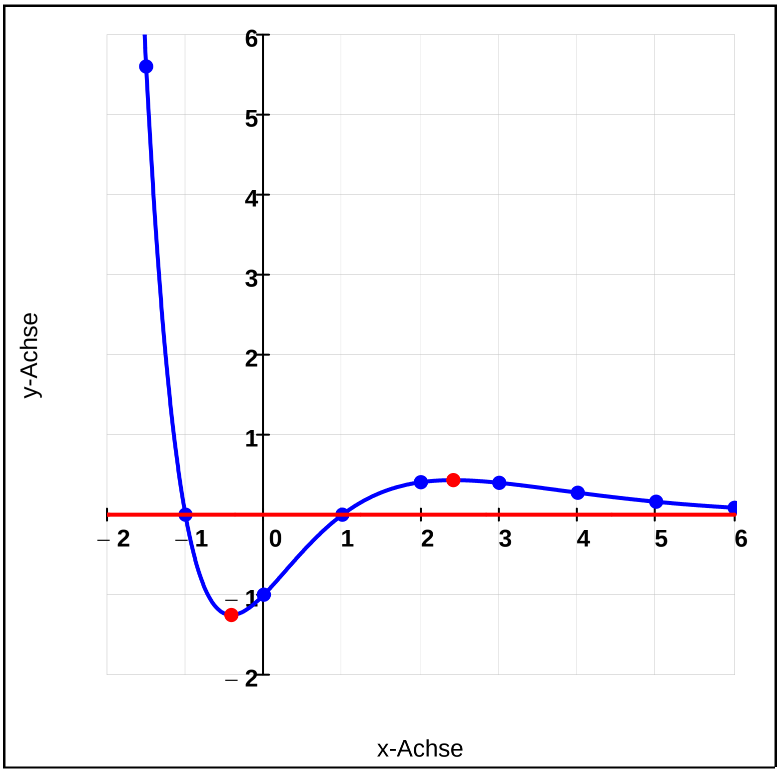
$$\lim_{x\to\infty}\left[\underset{\underset{0}{\downarrow}}{e^{-x}}\cdot\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{\left(x^2-1\right)}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{x^2-1}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{e^x}}\right) \overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{2\cdot x}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{e^x}}\right) \overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{e^x}}\right) = 0$$

Horizontale Asymptote **$y = 0$**

Tiefpunkt: $x_T := 1-\sqrt{2} = -0.4$ Hochpunkt: $x_H := 1+\sqrt{2} = 2.4$

$y_T := f(x_T) = -1.254$ $y_H := f(x_H) = 0.432$

$x_d := -2\,..\,6$



$x_d =$	$f(x_d) =$
-2	22.17
-1	0
0	-1
1	0
2	0.41
3	0.4
4	0.27
5	0.16
6	0.09

Teilaufgabe 1.4 **(5 BE)**

Begründen Sie, dass die Funktion $\mathbf{f\_}$ mit $\mathbf{f\_(x) = f(x)}$ mit $\mathbf{D_{f\_} = \,]-\infty\,;\,1-\sqrt{2}\,]}$ umkehrbar ist.

Der Punkt $\mathbf{P'(\,?\,/\,-1\,)}$ liegt auf dem Graphen von $\mathbf{u(x) = f\_^{-1}(x)}$.
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t' in P' an diesen Graphen.

G_f ist in $\mathbf{]-\infty\,;\,1-\sqrt{2}\,]}$ streng monoton fallend, also umkehrbar.

$$\mathbf{f(-1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P'(0,-1)}$$

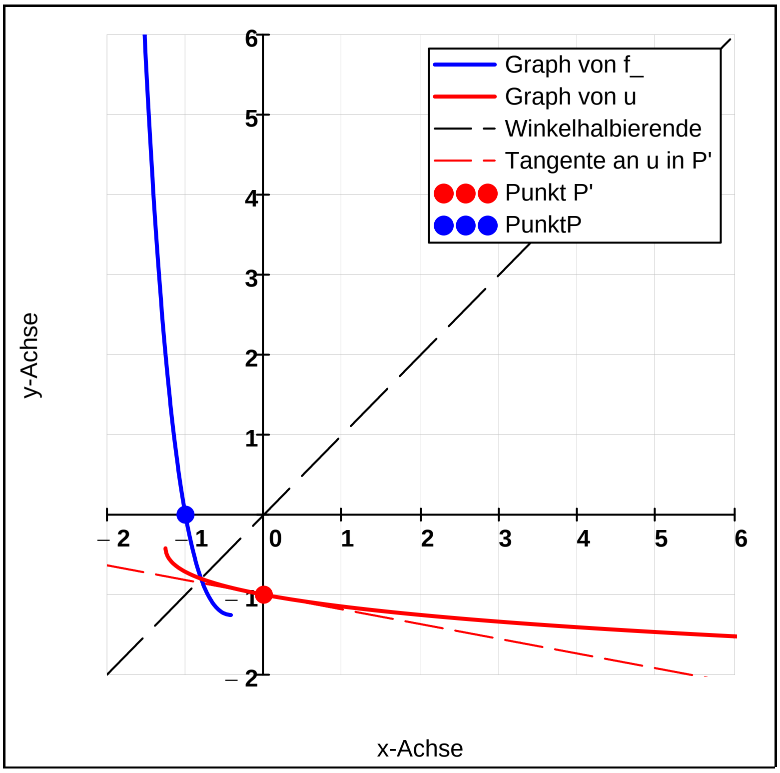
Ableitungsfunktion: $\mathbf{f'(x) := \frac{d}{dx}f(x)\ \ Faktor\ \ = -e^{-x}\cdot\left(x^2 - 2\cdot x - 1\right)}$

Steigung der Tangente: $\mathbf{m_u := \frac{1}{f'(-1)} \rightarrow -\frac{e^{-1}}{2}}$

Funktionsterm der Tangente: $\mathbf{t(x) := m_u\cdot(x-0) - 1}$

$$\mathbf{t(x) = -\frac{x\cdot e^{-1}}{2} - 1}$$

$$\mathbf{x_f := -2, -1.99 \,..\, 1-\sqrt{2}}$$



Teilaufgabe 1.5.0

Gegeben ist die Integralfunktion F mit $\mathbf{F(x) = \int_1^x f_1(t)\,dt}$ mit der Definitionsmenge $\mathbf{D_F = IR}$

und dem Graphen $\mathbf{G_F}$.

Teilaufgabe 1.5.1 **(7 BE)**
Ermitteln Sie die Art und die Abszissen der Extrempunkte sowie die Abszissen der Wendepunkte von $\mathbf{G_F}$. Begründen Sie die Anzahl der Nullstellen von F.

Es gilt: $\mathbf{F'(x) = f(x)}$

Das Monotonieverhalten von **F** entspricht dem Vorzeichen von **f**:

$\mathbf{F'(x) = f(x) > 0}$ für $\mathbf{x \le -1}$ $\Rightarrow$ G_F ist streng monoton steigend in $\mathbf{]\ -\infty\ ;\ -1\ ]}$.

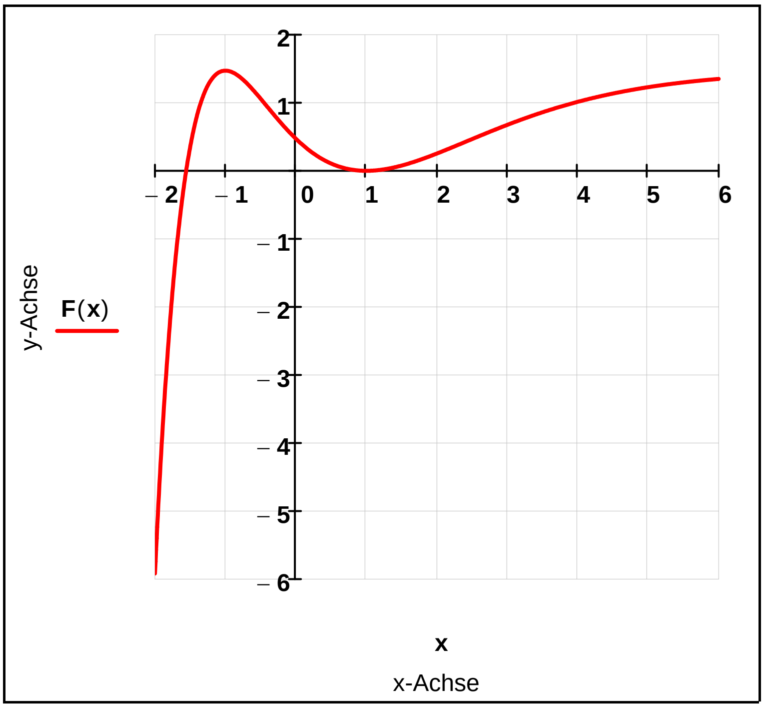
$\mathbf{F'(x) = f(x) < 0}$ für $\mathbf{-1 \le x \le 1}$ $\Rightarrow$ G_F ist streng monoton fallend in $\mathbf{]\ -1\ ;\ 1\ ]}$.

$\mathbf{F'(x) = f(x) > 0}$ für $\mathbf{x \ge 1}$ $\Rightarrow$ G_F ist streng monoton steigend in $\mathbf{[\ 1\ ;\ \infty\ [}$.

$\Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $\mathbf{x = -1}$ und Tiefpunkt an der Stelle $\mathbf{x = 1}$.

Es gilt: $\mathbf{F''(x) = f'(x)}$

Wendestellen $\mathbf{x_{W1} = 1 - \sqrt{2} \wedge x_{W2} = 1 + \sqrt{2}}$.



$\mathbf{F(x) = \int_1^x f_1(t)\,dt}$

$\mathbf{\int_1^1 f_1(t)\,dt = 0}$

also erste Nullstelle $\mathbf{x_{N1} = 1}$

An der Stelle $\mathbf{x = -1}$
existiert ein Hochpunkt,
G_F ist steng monoton steigend
für $\mathbf{x \le -1}$.
Existenz einer zweiten Nullstelle
für $\mathbf{x \le -1}$

Teilaufgabe 1.5.2 (9 BE)
Ermitteln Sie eine integralfreie Darstellung von F(x). Bestimmen Sie den Grenzwert von F(x) für $x \to \pm\infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis anhand des Graphen von f_1.

[Teilergebnis: $\mathbf{F(x) = \left(-x^2 - 2\cdot x - 1\right)\cdot e^{-x} + 4\cdot e^{-1}}$]

$$\int f_1(x)\,dx = \int \underset{v'(x)}{e^{-x}}\cdot\underset{u(x)}{\left(x^2-1\right)}\,dx = \left(x^2-1\right)\cdot\left(-e^{-x}\right) - \int \left(-e^{-x}\right)\cdot 2\cdot x\,dx$$

1. partielle Integration:

$$u(x) := x^2 - 1 \qquad u'(x) := \frac{d}{dx}u(x) = 2\cdot x$$

$$v'(x) := e^{-x} \qquad v(x) := -e^{-x}$$

$$\int \underset{v'(x)}{\left(-e^{-x}\right)}\cdot\underset{u(x)}{2\cdot x}\,dx = 2\cdot x\cdot e^{-x} - \int e^{-x}\cdot 2\,dx = 2\cdot x\cdot e^{-x} - \left(-2\cdot e^{-x}\right) = 2\cdot x\cdot e^{-x} + 2\cdot e^{-x}$$

2. partielle Integration

$$u(x) := 2\cdot x \qquad u'(x) := \frac{d}{dx}u(x) = 2$$

$$v'(x) := -e^{-x} \qquad v(x) := e^{-x}$$

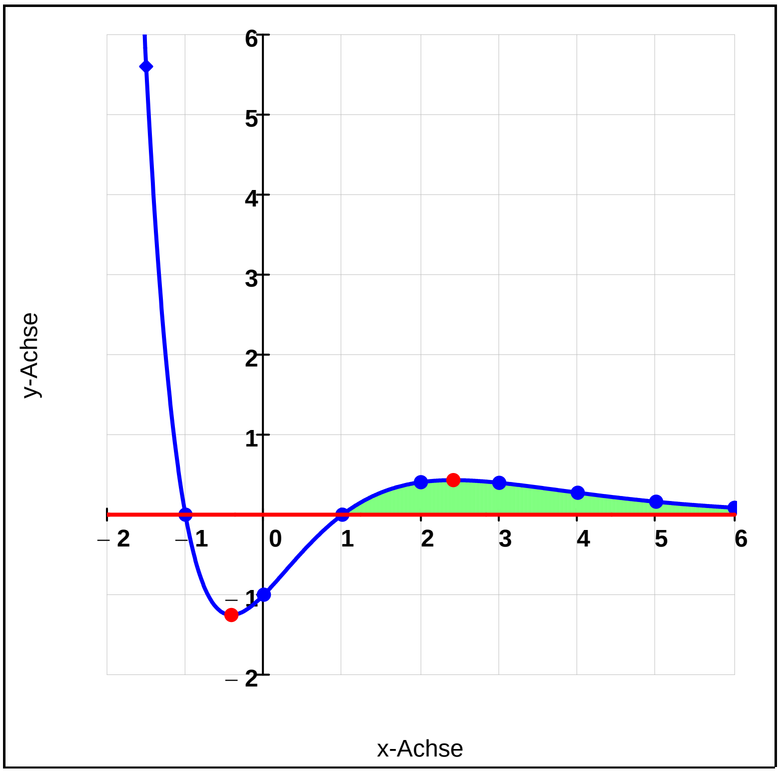
$$\Rightarrow \quad \int f_1(x)\,dx = \left(x^2-1\right)\cdot\left(-e^{-x}\right) - \left(2\cdot x\cdot e^{-x} + 2\cdot e^{-x}\right) = \left(-x^2 - 2\cdot x - 1\right)\cdot e^{-x}$$

$$F(x) = \int_1^x f_1(t)\,dt = \left(-x^2 - 2\cdot x - 1\right)\cdot e^{-x} - (-1 - 2 - 1)e^{-1} = \left(-x^2 - 2\cdot x - 1\right)\cdot e^{-x} + \frac{4}{e}$$

$$F_s(x) := \left(-x^2 - 2\cdot x - 1\right)\cdot e^{-x} + \frac{4}{e}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(-x^2-2\cdot x-1\right)\cdot e^{-x}+\frac{4}{e}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\overset{\overset{-\infty}{\uparrow}}{-x^2-2\cdot x-1}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{e^x}}+\frac{4}{e}\right) \overset{\text{L'Hosp}}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\overset{\overset{-\infty}{\uparrow}}{-2\cdot x-2}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{e^x}}+\frac{4}{e}\right)$$

$$\overset{\text{L'Hosp}}{\ldots =} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{e^x}}+\frac{4}{e}\right) = \frac{4}{e}$$



Die Fläche, die der Graph von f_1 und die x-Achse für $\mathbf{x \geq 1}$ einschließen, hat die Flächenmaßzahl $\mathbf{\frac{4}{e}}$.

Teilaufgabe 1.6 (7 BE)

Gegeben ist weiter die in IR definierte Funktion g mit

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x < 1 \\ \dfrac{\arctan(3-3\cdot x)}{x} & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

Begründen Sie, dass g an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist. Überprüfen Sie, ob g an dieser Stelle auch differenzierbar ist.

Linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \to 1^-} \left[e^{-x}\cdot\left(x^2-1\right)\right] \to 0$$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\arctan(x) := \operatorname{atan}(x)$ Funktionswert:

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{\arctan(3-3\cdot x)}{x}\right) \to 0$$

$$\frac{\arctan(0)}{1} = 0$$

⇒ G_g ist stetig an der Stelle $x = 1$.

$$\frac{d}{dx}\frac{\arctan(3-3\cdot x)}{x} \to -\frac{3}{x\cdot\left[(3\cdot x-3)^2+1\right]} - \frac{\operatorname{atan}(3-3\cdot x)}{x^2}$$

$$g'(x) = \begin{cases} \left[-e^{-x}\cdot\left(x^2-2\cdot x-1\right)\right] & \text{if } x < 1 \\ \left[-\dfrac{3}{x\cdot\left[(3\cdot x-3)^2+1\right]} - \dfrac{\operatorname{atan}(3-3\cdot x)}{x^2}\right] & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

Linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \to 1^-} \left[-e^{-x}\cdot\left(x^2-2\cdot x-1\right)\right] \to 2\cdot e^{-1}$$

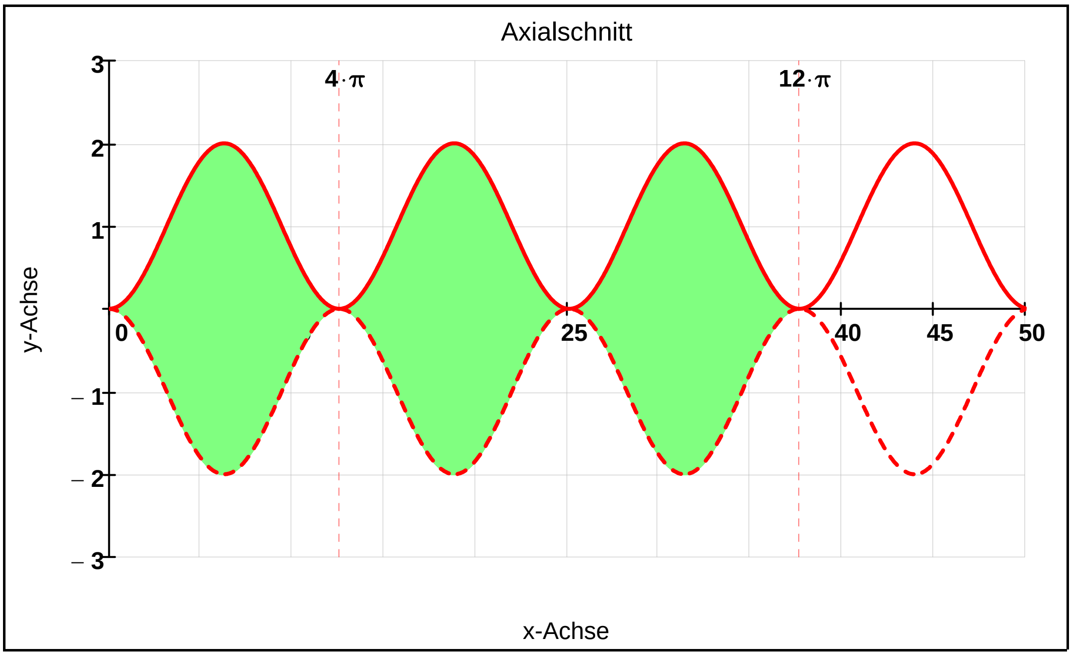
Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \to 1^+} \left[-\frac{3}{x\cdot\left[(3\cdot x-3)^2+1\right]} - \frac{\operatorname{atan}(3-3\cdot x)}{x^2}\right] \to -3$$

⇒ G_g ist nicht differenzierbar an der Stelle $x = 1$.

Teilaufgabe 2.0
Bei einer Massenproduktion werde in einem Produktionsschritt gleichzeitig viele Teile gleicher Gestalt hergestellt. Die form für die Teile dieser Massenproduktion entsteht durch Rotation des Graphen der Funktion h mit $h(x) := 1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ und $D_h = [\,0\,;\,100\cdot\pi\,]$ um die x-Achse.

Teilaufgabe 2.1 **(4 BE)**
Berechnen Sie die Maßzahl des Volumeninhalts des gesamten Rotationskörpers.



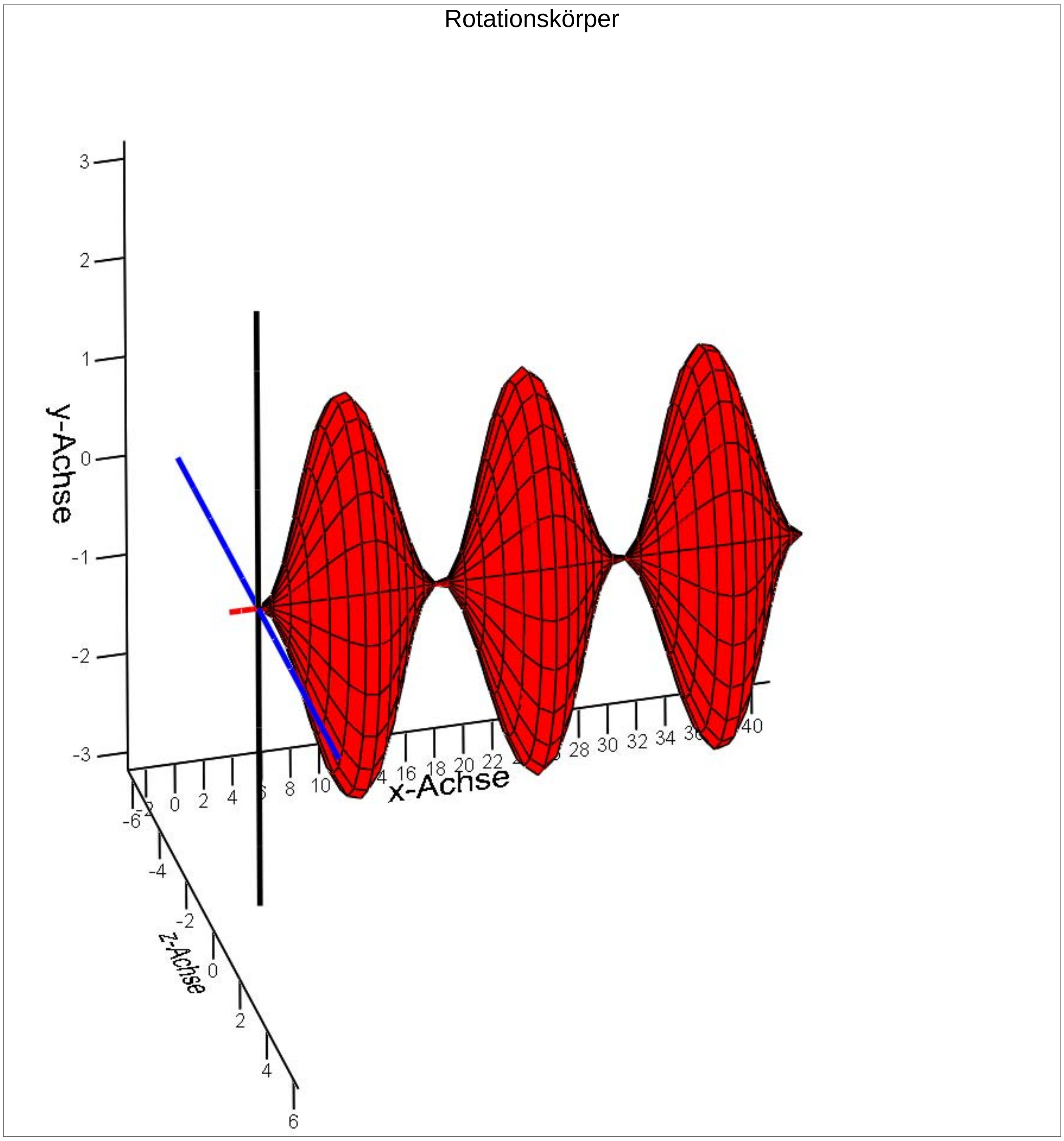
$$\int \left(1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 dx = \int \left[1 - 2\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right] dx$$

Nebenrechung: $$\int \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 dx = \int \frac{1}{2}\cdot(1 + \cos(x))\, dx = \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}\cdot\sin(x)$$

$$\Rightarrow \int \left(1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 dx = x - 2\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}\cdot\sin(x) = \frac{3}{2}\cdot x - 4\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\sin(x)$$

$$V_x = \pi\cdot\int_0^{100\cdot\pi} (h(x))^2\, dx = \pi\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot 100\cdot\pi - 4\cdot\sin\left(\frac{100\cdot\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\sin(100\cdot\pi)\right) = 150\cdot\pi^2$$

▶ Definitionen



Rotationskörper

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)
Ermitteln Sie die Anzahl der hergestellten gleichen Teile pro Produktionsschritt und die Maßzahl des Volumens eines einzelnen Teils.

Die Funktion h hat die Periode $4\cdot\pi$. ⇒ Pro Produktionschritt werden 25 gleiche Teile hergestellt.

Jedes Teil hat eine Volumeneinheit von $V_0 := \frac{150\cdot\pi^2}{25} = 6\cdot\pi^2$ Volumeneinheiten.

Teilaufgabe 3 (7 BE)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' + 2\cdot y = -2 + e^{-2\cdot x}\cdot\cos(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ mithilfe der Variation der Konstanten.

Teilaufgabe a)

Allgemeine Differentialgleichung: $y' + p(x)\cdot y = q(x)$

Konkrete lineare inhomogene DGL: $y' + 2\cdot y = -2 + e^{-2\cdot x}\cdot\cos(x)$

Definition von p(x) und q(x): $p(x) := 2$ $\quad q(x) := -2 + e^{-2\cdot x}\cdot\cos(x)$

Definition der homogenen DGL: $y' + p(x)\cdot y = 0 \rightarrow 2\cdot y + y' = 0$

Verwendung Differentialquotient: $\frac{dy}{dx} = -2\cdot y$

Trennen der Variablen: $\frac{dy}{y} = -2\cdot dx$

Integration: $\int \frac{1}{y}\,dy = \int -2\,dx + k \rightarrow \ln(y) = k - 2\cdot x$

Auflösen nach y: $y_H(x,K) := K\cdot e^{-2\cdot x}$

<u>Ermittlung einer speziellen Lösung der inhomogenen DGL:</u>

Neue Bezeichnungen: $y_1(x) := e^{-\int p(x)\,dx}$ $\quad y'_1(x) := \frac{d}{dx}y_1(x)$

Konkret: $y_1(x) = e^{-2\cdot x}$ $\quad y'_1(x) = -2\cdot e^{-2\cdot x}$

Spezielle Lösung: $y_S(x) = k(x)\cdot y_1(x)$

Ableitung: $y'_S(x) = k'(x) \cdot y_1(x) + k(x) \cdot y'_1(x)$

Berechnung von k'(x):

$y_P(x)$, $y'_P(x)$, p(x) und **q(x)** werden in die DGL eingesetzt und die sich ergebende Gleichung wird vereinfacht:

DGL: $y' + p(x) \cdot y = q(x) \rightarrow 2 \cdot y + y' = e^{-2 \cdot x} \cdot \cos(x) - 2$

mit $p(x) = 2$ $\quad q(x) = e^{-2 \cdot x} \cdot \cos(x) - 2$

Eingesetzt in die DGL liefert:

$$k'(x) \cdot y_1(x) + k(x) \cdot y'_1(x) + p(x) \cdot k(x) \cdot y_1(x) = q(x)$$

$$k'(x) \cdot e^{-2 \cdot x} + k(x) \cdot \left(-2e^{-2 \cdot x}\right) + (2) \cdot k(x) \cdot e^{-2 \cdot x} = e^{-2 \cdot x} \cdot \cos(x) - 2$$

$$k'(x) \cdot e^{-2 \cdot x} = e^{-2 \cdot x} \cdot \cos(x) - 2 \qquad \Rightarrow \qquad k'(x) = \cos(x) - 2 \cdot e^{2 \cdot x}$$

Berechnung mit Mathcad:

$$k'(x) := k'(x) \cdot y_1(x) + k(x) \cdot \left(y'_1(x) + p(x) \cdot y_1(x)\right) = q(x) \text{ auflösen}, k'(x) \rightarrow \cos(x) - 2 \cdot e^{2 \cdot x}$$

$$k'(x) = \cos(x) - 2 \cdot e^{2 \cdot x}$$

Integration: $k(x) := \int k'(x)\, dx$ $\qquad k(x) = \sin(x) - e^{2 \cdot x}$

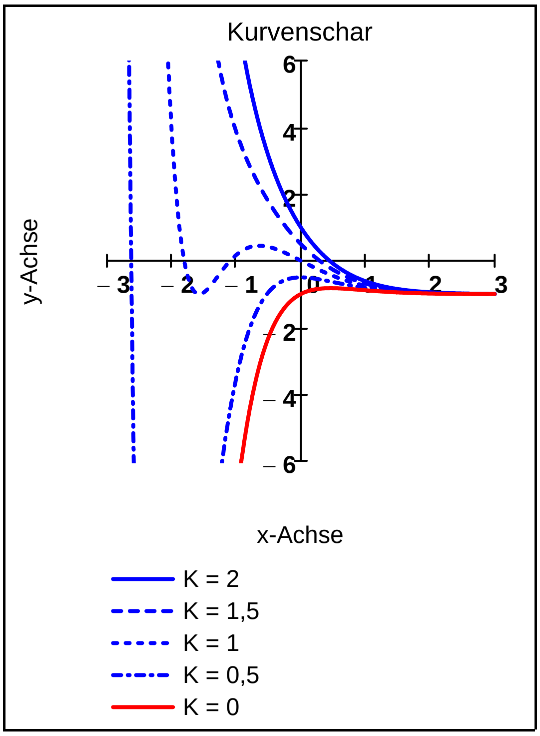
Spezielle Lösung: $y_S(x) := k(x) \cdot y_1(x)$ $\qquad y_S(x) = e^{-2 \cdot x} \cdot \sin(x) - 1$

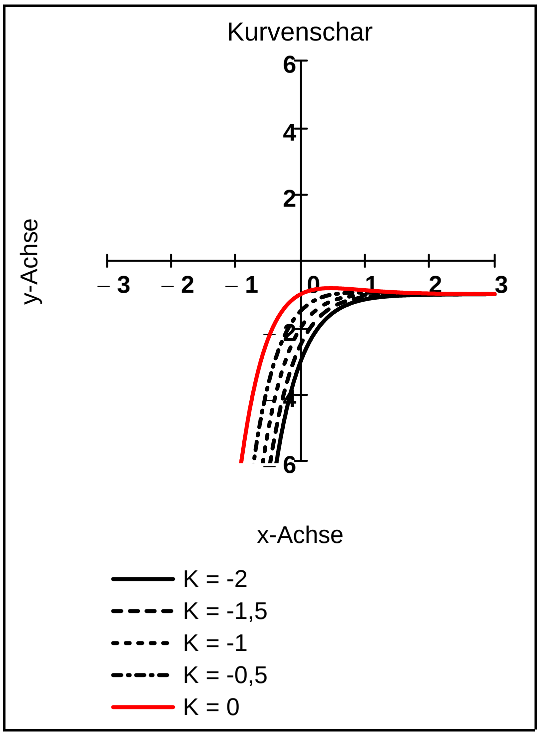
Allgemeine Lösung:

$$y_A(x, K) := y_S(x) + y_H(x, K) = K \cdot e^{-2 \cdot x} - e^{-2 \cdot x} \cdot \left(e^{2 \cdot x} - \sin(x)\right)$$

$$y_A(x, K) = K \cdot e^{-2 \cdot x} + e^{-2 \cdot x} \cdot \sin(x) - 1$$ mit **D = IR**

$$y_A(x, K) := K \cdot e^{-2 \cdot x} + e^{-2 \cdot x} \cdot \sin(x) - 1$$


Kurvenschar
6
4
2
– 3
– 2
– 1
0
1
2
3
– 2
– 4
– 6
y-Achse
x-Achse
K = 2
K = 1,5
K = 1
K = 0,5
K = 0


Kurvenschar
6
4
2
– 3
– 2
– 1
0
1
2
3
– 2
– 4
– 6
y-Achse
x-Achse
K = -2
K = -1,5
K = -1
K = -0,5
K = 0