Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2013

- **Mathematik 13 Technik - B I - Lösung**

Teilaufgabe 1.0
Zum 40-jährigen Firmenjubiläum des Bestehens der Beruflichen Oberschule *ARCUS* werden 250 Ehrengäste eingeladen. Speziell für die Ehrengäste findet ein Empfang mit dem Kultusminister statt. Aus den Erfahrungen der letzten Jahre wird angenommen, dass die Ehrengäste die Einladung mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% annehmen. Die Schule verfügt über eine Aula, die bei ausreichender Beinfreiheit Platz für 175 Stühle bietet.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die 175 Stühle nicht ausreichen.

X: Anzahl der Ehrengäste, die kommen, unter $n := 250$.

Wahrscheinlichkeit: $p := 0.75$

Erwatungswert: $\mu := n \cdot p \qquad \mu = 187.5$

Standardabweichung: $\sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \qquad \sigma = 6.847$ >3, Näherung möglich

$$P(X > 175) = 1 - P(X \le 175) = 1 - \Phi\left(\frac{175 - 187.5 + 0.5}{6.847}\right) = 1 - \Phi(-1.75) = 1 - (1 - \Phi(1.75))$$

$P(X > 175) = 0.96$

Mathcad-Lösung:

kumulative standardisierte Normalverteilung: $P(x) := \text{knorm}(x)$

$k_a := 175 \qquad x_a := \frac{k_a - \mu + 0.5}{\sigma}$ Gleitkommazahl, 3 $= -1.75$

$P_a := P(x_a) \qquad P_a = 0.04006 \qquad 1 - P_a = 0.96$

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)
Berechnen Sie die Anzahl der zusätzlich mindestens benötigten Stühle für den Empfang, wenn das Risiko, zu wenig Stühle aufgestellt zu haben, höchstens 1% betragen soll.

$$P(X > k) \le 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \le k) \le 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \le k) \ge 0.99$$

$$\Phi\left(\frac{k - 187.5 + 0.5}{\sqrt{46.875}}\right) \ge 0.99 \quad \overset{\text{TW}}{\Rightarrow} \quad \frac{k - 187.5 + 0.5}{\sqrt{46.875}} \ge 2.326$$

$$k \ge 2.326 \cdot \sqrt{46.875} + 187.5 - 0.5 \rightarrow k \ge 202.925 \quad \Rightarrow \quad k_{min} \ge 203$$

$203 - 175 = 28$ Es müssen mindestens 28 zusätzliche Stühle aufgestellt werden.

Mathcad-Lösung: $\alpha := 0.99$

inverse kumulative standardisierte Normalverteilung: $t(k) := \text{qnorm}(k, 0, 1)$

$k_\alpha := t(\alpha) = 2.326$

$t_0(k) := \dfrac{k - \mu + 0.5}{\sigma}$ Gleitkommazahl, 5 $\rightarrow 0.14606 \cdot k - 27.313$

$k_0 := t_0(k) = k_\alpha \rightarrow 0.14606 \cdot k - 27.313 = 2.3263478740408416$ $\left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, k \\ \text{Gleitkommazahl}, 6 \end{array} \right. \rightarrow 202.926$

Ergebnis: $k_0 = 202.926$

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)
Eine Überlegung des Schulleiters ist, dass es nicht gut aussieht, wenn bei dieser Veranstaltung zu viele Ehrenplätze leer bleiben. Daher möchte er wissen, in welchem Bereich die zu erwartende Anzahl der Ehrengäste liegt. Bestimmen Sie den Bereich $J = \{ x \in \mathrm{IN} \mid |x - \mu| < \sigma \}$, in dem die zu erwartende Anzahl der Ehrengäste liegt. Berechnen Sie auch die Wahrscheinlichkeit $P(J)$.

Untere Grenze: $\mu - \sigma = 180.653$

Obere Grenze: $\mu + \sigma = 194.347$

$\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$ Gleitkommazahl, 3 $\rightarrow 181.0 < X < 194.0$

$\Rightarrow \quad J = \{ 181, 182, \ldots, 194 \}$

$$P(J) = P(181 \le X \le 194) = P(194) - P(180) = \Phi\left(\frac{194 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{180 - \mu + 0.5}{\sigma}\right)$$

$$\ldots = \Phi(1.022) - \Phi(-1.022) = \Phi(1.022) - (1 - \Phi(1.022)) = 2 \cdot \Phi(1.022) - 1$$

$$\ldots = 2 \cdot 0.84614 - 1 = 0.692$$

Mathcad-Lösung:

$k_1 := 180$ $\qquad x_1 := \dfrac{k_1 - \mu + 0.5}{\sigma}$ Gleitkommazahl, 3 $= -1.02$

$P_1 := P(x_1)$ $\qquad P_1 = 0.15386$

$k_2 := 194$ $\qquad x_2 := \dfrac{k_2 - \mu + 0.5}{\sigma}$ Gleitkommazahl, 3 $= 1.02$

$P_2 := P(x_2)$ $\qquad P_2 = 0.84614$ $\qquad P_J := P_2 - P_1$ $\qquad P_J = 0.692$

Teilaufgabe 2.0
Die *ARCUS*-Schule führt zu Beginn jeden Schuljahres bei allen neu aufgenommenen Schülern der technischen Ausbildungsrichtung (T-Schüler) eine Test durch, um Schüler ausfindig zu machen, die gemeinsam in sogenannten Computerklassen unterrichtet werden können. Erfahrungsgemäß sind im Schnitt 15% der Schüler der Ausbildungsrichtung Technik für die Computerklasse geeignet.

Teilaufgabe 2.1 (11 BE)
Berechnen Sie unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: *Unter den 212 getesteten T-Schülern befinden sich genau 30 geeignete.*
B: *Unter den 212 getesteten T-Schülern sind mindestens 20, höchstens aber 40, die für die Computerklassen geeignet sind.*
C: *Der achte zufällig getestete Schüler ist der erste geeignete.*

Gegeben: $n := 212$ $\quad p := 0.15$

X: Anzahl der für die Computerklasse geeigneten Technik-Schüler.

Binomialverteilung:

$$P_A = P(X = 30) = B(212, 0.15, 30) = \binom{212}{30} \cdot 0.15^{30} \cdot (1 - 0.15)^{212-30}$$

Nebenrechnung: $\quad \text{combin}(212, 39) = 6.284 \times 10^{42}$

$$P_A := \text{combin}(212, 30) \cdot 0.15^{30} \cdot 0.85^{182} \qquad P_A = 0.074$$

Mathcad-Lösung: $\quad P_a := \text{dbinom}(30, 212, 0.15) = 0.074$

$\mu := n \cdot p = 31.8 \qquad \sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 5.199 \qquad$ >3, Näherung möglich

$$P_B = P(20 \le X \le 40) = P(40) - P(19) = \Phi\left(\frac{40 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{19 - \mu + 0.5}{\sigma}\right)$$

$$... = \Phi(1.673) - \Phi(-2.366) = \Phi(1.673) - (1 - \Phi(2.366)) = 0.95254 - 1 + 0.99111 = 0.94365$$

Mathcad-Lösung: $\quad P_b := \text{pnorm}(40, \mu, \sigma) - \text{pnorm}(19, \mu, \sigma) = 0.93572$

$P_C := 0.15 \cdot 0.85^7 \qquad P_C = 0.04809$

Gegenereignis $\overline{D} = nD$: Unter den ersten acht Schülern ist kein geeigneter.

$P_{nD} := 0.85^8 \qquad P_{nD} = 0.272 \qquad 1 - P_{nD} = 0.728$

Teilaufgabe 2.2 **(3 BE)**
Die T-Schüler benötigen für den Test durchschnittlich 45 Minuten mit einer Standardabweichung von 3,0 Minuten. Man kann davon ausgehen, dass die von den T-Schülern benötigte Zeit für den Test normalverteilt ist. Um den Schülern entgegen zu kommen, wird die Dauer des Tests auf 50 Minuten festgelegt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein rein zufällig ausgewählter T-Schüler mit dem Test dennoch nicht fertig wird.

Gegeben: $\mu := 45$ $\sigma := 3$ X: benötigte Zeit in Minuten, um fertig zu werden

$$P(X > 50) = 1 - P(X \le 50) = 1 - \Phi\left(\frac{50 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(1.667) = 1 - 0.95254 = 0.04746$$

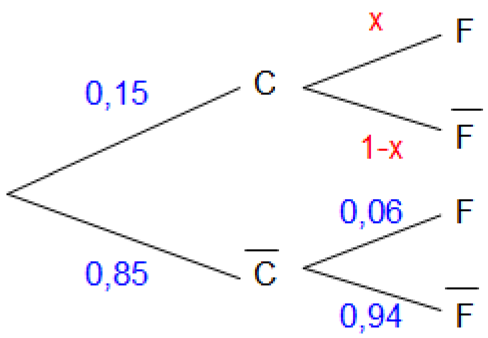
$\Rightarrow$ 4,7% der Schüler bewältigen den Test innerhalb von 50 Minuten nicht.

Teilaufgabe 2.3 **(5 BE)**
Besonders geeignete T-Schüler möchte die *ARCUS*-Schule durch kostenfrei zur Verfügung gestellte Notebooks fördern. Ein hierfür geeigneter Test, der F-Test, zeigt, dass ein zufällig ausgewählter T-Schüler mit einer Wahrscheinlichkeit von 16% für diese Förderung in Frage kommt. Bei einem für die Computerklasse ungeeigneten T-Schüler zeigt dieser F-Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 6% an, dass der Schüler für die Förderung geeignet ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der F-Test bei einem für die Computerklasse geeigneten T-Schüler positiv ausfällt.

Gegeben:

C: geeignet für die Computerklasse $p_C = 0.16$

F: geeignet für die Förderung: $p_{nC \cap F} = 0.06$



$$P_F = P_{C \cap F} + P_{nC \cap F}$$

$$!$$

$$P_F = 0.15 \cdot x + 0.85 \cdot 0.06 = 0.16$$

Berechnung:

$$x_0 := 0.15 \cdot x + 0.85 \cdot 0.06 = 0.16 \;\left|\begin{array}{l}\text{auflösen}, x \\ \text{Gleitkommazahl}, 3\end{array}\right. \rightarrow 0.727 \qquad x_0 = 72.7\%$$

Bei 72,7% der geeigneten T-Schüler geht der Test positiv aus.

Teilaufgabe 3 (7 BE)
Die *ARCUS*-Schule bietet seit einigen Jahren das Fach Spanisch als zweite Fremdsprache an. Da die Sprache Spanisch bei Schülern immer beliebter wird, geht die Schule davon aus, dass zum kommenden Schuljahr eine weitere Lehrkraft für Spanisch benötigt wird. Dies ist dann der Fall, wenn der Anteil der Schüler, die das Fach Spanisch belegen, 15% übersteigt (Gegenhypothese). Daher werden 500 rein zufällig ausgewählte Schüler der 11-ten Klassen befragt, ob sie im nächsten Schuljahr Spanisch wählen werden. Geben Sie die Testgröße und die Nullhypothese an, bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf einem Signifikanziveau von 5% und geben Sie den daraus resultierenden Annahme- und Ablehnungsbereich an.

Testgröße: Anzahl der Schüler, die das Fach Spanisch belegen unter $n := 500$.

Testart: Rechtsseitiger Signifikanztest $p := 0.15$

Nullhypothese H_0: $p_0 \le p \to p_0 \le 0.15$

Gegenhypothese H_1: $p_1 > p \to p_1 > 0.15$

Annahmebereich: $A = \{ 0, 1, 2, ..., k \}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{ k+1, k+2, ..., 100 \}$

Sigifikanzniveau: $\alpha_S = 0.05$

$$P(\overline{A}) \le 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \ge k+1) \le 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \le k) \le 0.05$$

$$\Leftrightarrow \quad P(X \le k) \ge 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad F(A) \ge 0.95$$

Erwartungswert: $\mu := n \cdot p = 75$ $\quad \sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 7.984$ $\quad > 3$

Näherung durch Normalverteilung möglich.

$$\Phi\left(\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \ge 0.95$$

Tafelwerk: $\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma} \ge 1.645$ $\left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, k \\ \text{Gleitkommazahl}, 4 \end{array} \right. \to 87.63 \le k < \infty$

$\Rightarrow$ $k_{min} = 88$

Annahmebereich: $A = \{ 0, 1, ..., 88 \}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{ 89, 90, ..., 500 \}$

<u>Mathcad-Lösung:</u> $k := \text{qbinom}(0.95, 500, 0.15) = 88$