Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2013

- **Mathematik 13 Nichttechnik - A I - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0
Gegeben ist die reelle Funktion f in der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$ durch

$f(x) := \frac{x^2 - 5}{4\cdot(x-3)}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)
Bestimmen Sie D_f sowie die Nullstellen und die Art der Definitionslücke von f.

Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ 3 \}$

Zähler auslesen: $z(x) := \text{numer}(f(x)) \rightarrow x^2 - 5$

Nullstellenbed.: $x0 := z(x) = 0 \rightarrow x^2 - 5 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}$

Nullstellen: $x_1 = -\sqrt{5} = -2.236$ $\quad x_2 = \sqrt{5} = 2.236$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 5}{4\cdot(x-3)} \rightarrow -\infty \qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 5}{4\cdot(x-3)}$$

$\Rightarrow$ $x_0 := 3$ ist Polstelle 1. Ordnung.

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Zeigen Sie, dass sich die Funktionsgleichung von f auch in der Form $f(x) = \frac{1}{4}\cdot x + \frac{3}{4} + \frac{1}{x-3}$ darstellen lässt und geben Sie die Geichungen und die Art aller Asymptoten von G_f an.

Polynomdivision mit Rest:

$$\left(x^2 - 5\right) : (4\cdot x - 12) = \frac{1}{4}\cdot x + \frac{3}{4}$$
$$-\left(x^2 - 3\cdot x\right)$$
$$3\cdot x - 5$$
$$-(3\cdot x - 9)$$
$$4 \quad \text{Rest}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}\cdot x + \frac{3}{4} + \frac{4}{(4\cdot x - 12)}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}\cdot x + \frac{3}{4} + \frac{1}{(x - 3)}$$

Schiefe Asymptote: $g(x) := \frac{1}{4}\cdot x + \frac{3}{4}$

Senkrechte Asymptote: $x = 3$

Teilaufgabe 1.3 (10 BE)
Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f und bestimmen Sie daraus die Art und die Koordinaten der Extrempunkte von G_f. Geben Sie auch die Wertemenge von f an.

[Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 6\cdot x + 5}{4\cdot(x-3)^2}$]

1. Ableitung:

$$f'(x) = \frac{2\cdot x\cdot 4\cdot(x-3) - \left(x^2 - 5\right)\cdot 4\cdot 1}{16\cdot(x-3)^2} = \frac{2\cdot x^2 - 6\cdot x - x^2 + 5}{4\cdot(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6\cdot x + 5}{4\cdot(x-3)^2}$$

Horizontale Tangenten: $x_E := x^2 - 6\cdot x + 5 = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Extremstellen: $x_{E1} := 1$ $\qquad x_{E2} := 5$

Monotonietabelle:

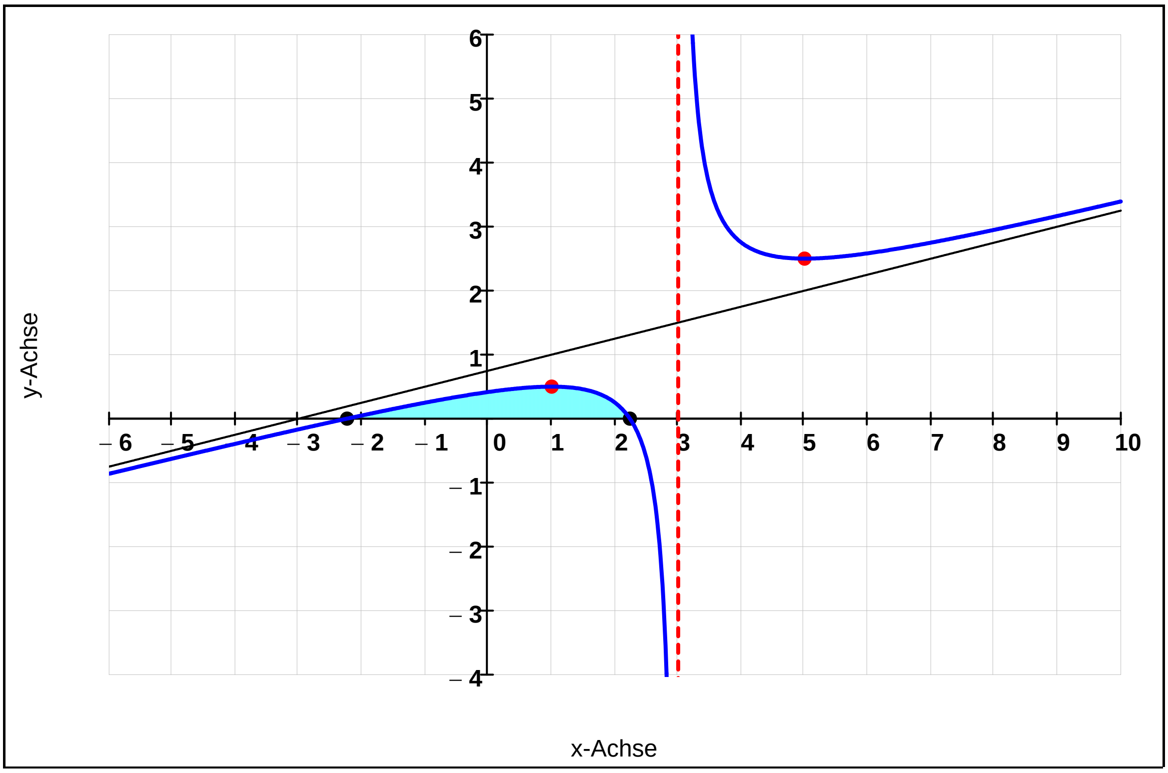
		$x = 1$		$x \neq 3$		$x = 5$	
Zähler	pos		neg		neg		pos
Nenner	pos		pos		pos		pos
f '(x)	pos		neg		neg		pos
G_f	sms		smf		smf		sms
		HP		Polstelle		TP	

Funktionswerte: $f(1) = 0.5$ $\qquad f(5) = 2.5$

HP(1 / 0,5) $\qquad$ **TP(5 / 2,5)**

Wertemenge: $W = \left]-\infty\ ;\ 0.5\right] \cup \left[\ 2.5\ ;\ \infty\right[$

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)
Zeichnen Sie die Asymptoten und G_f mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse für $-4 \le x \le 8$ in ein Koordinatensystem.



Teilaufgabe 1.5 (6 BE)
G_f schließt mit der x-Achse ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie das Flächenstück in der Zeichnung von 1.4 und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts auf zwei Nachkomma- stellen gerundet.

Stammfunktion: $F(x) := \int \left(\frac{1}{4}\cdot x + \frac{3}{4} + \frac{1}{x-3}\right) dx = \frac{3\cdot x}{4} + \ln(|x-3|) + \frac{x^2}{8}$

Fläche: $A := F(\sqrt{5}) - F(-\sqrt{5})$

$A = \ln(3-\sqrt{5}) - \ln(\sqrt{5}+3) + \frac{3\cdot\sqrt{5}}{2}$ $\qquad A = 1.43$

Teilaufgabe 2.0

Nun ist die Funktion $g(x) = \ln(f(x)) = \ln\left[\frac{x^2 - 5}{4\cdot(x-3)}\right]$ in der maximalen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$ gegeben. Ihr Graph ist G_g.

Teilaufgabe 2.1 (6 BE)
Begründen Sie anhand der Zeichnung in Aufgabe 1.4, dass gilt:
$D_g = \left]-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right[\cup \left]3;\infty\right[$. Untersuchen Sie g auf Nullstellen und geben Sie das Verhalten von g an den Rändern von D_g an.

$$D_g = \{ x \mid f(x) > 0 \} \quad \Rightarrow \quad D_g = \left]-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right[\cup \left]3;\infty\right[$$

$$g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left[\frac{x^2 - 5}{4\cdot(x-3)}\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 5}{4\cdot(x-3)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 5 = 4\cdot(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4\cdot x + 7 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3}\cdot i \\ 2 - \sqrt{3}\cdot i \end{pmatrix}$$

G_g hat keine Nullstellen.

$$\lim_{x \to -\sqrt{5}^+} \ln\left[\underbrace{\frac{x^2 - 5}{4\cdot(x-3)}}_{\to 0}\right] \rightarrow -\infty \qquad \lim_{x \to \sqrt{5}^-} \ln\left[\underbrace{\frac{x^2 - 5}{4\cdot(x-3)}}_{\to 0}\right] \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} \ln\left[\underbrace{\frac{x^2 - 5}{4\cdot(x-3)}}_{\to \infty}\right] \rightarrow \infty$$

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)
Ermitteln Sie gegebenenfalls mithilfe bisheriger Ergebnisse die Extremstellen von G_g und deren Art.

$$g(x) := \ln\left[\frac{x^2 - 5}{4\cdot(x-3)}\right]$$

$$g'(x) := \frac{d}{dx}g(x) = \frac{2\cdot x}{x^2 - 5} - \frac{1}{x-3} = \frac{(x-1)\cdot(x-5)}{(x-3)\cdot\left(x^2 - 5\right)}$$

Funktionswerte: $g(1) = -\ln(2)$ $g(5) = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$

Da g dieselben Monotonieeigenschaften wie f besitzt, gilt: **HP(1 / $-\ln(2)$)** **TP(5 / $\ln\left(\frac{5}{2}\right)$)**

Teilaufgabe 3.0
Eine Gemeinde plant den Umbau einer Kreuzung, an der es unter der Woche am Morgen häufig zu Stauungen kommt. Aus diesem Grund wird das Verkehrsaufkommen untersucht und mathematisch modelliert. Für die Verkehrsdichte (Anzahl der Fahrzeuge pro Minute) an der Kreuzung ergibt sich näherungsweise eine Funktion der Form $z(t) = 0.25 \cdot t^2 \cdot e^{-a \cdot t} + 5$ mit $0 \le t \le 90$ und $a > 0$.
t ist die seit 7:00 Uhr vergangene Zeit in Minuten.
Bei der Rechnung kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.

Teilaufgabe 3.1 (3 BE)
Um 7:13 Uhr beträgt die Verkehrsdichte 27 Fahrzeuge pro Minute. Bestimmen Sie damit den Wert des Parameters a.
[Ergebnis: $a = 0.05$ in $\frac{1}{\text{min}}$]

$$z(t, a) := \left(\frac{1}{4} \cdot t^2 \cdot e^{-a \cdot t} + 5\right)$$

$$z(13, a) = 27 \rightarrow \frac{169 \cdot e^{-13 \cdot a}}{4} + 5 = 27 \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{-13 \cdot a} = \frac{22 \cdot 4}{169}$$

$$\Leftrightarrow \qquad a := \frac{\ln\left(\frac{22 \cdot 4}{169}\right)}{-13} \qquad a = 0.05$$

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)
Berechnen Sie die Verkehrsdichte um 7:00 Uhr und um 8:30 Uhr.

$$z(t) := 0.25 \cdot t^2 \cdot e^{-0.05 \cdot t} + 5$$

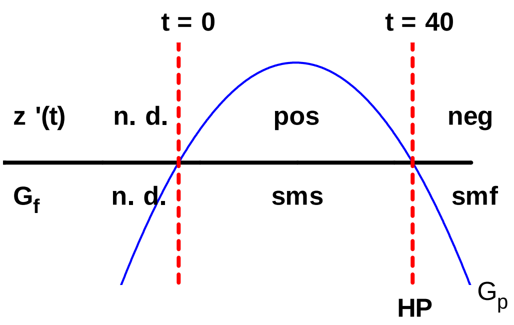
$$z(0) = 5 \qquad z(90) = 27.5$$

Teilaufgabe 3.3 (7 BE)
Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem die Verkehrsdichte am größten ist und berechnen Sie die größte Verkehrsdichte.
[Zur Kontrolle: $\frac{dz(t)}{dt} = z'(t) = \left(0.5 \cdot t - 0.0125 \cdot t^2\right) \cdot e^{-0.05 \cdot t}$]

$$z'(t) = 0.25 \cdot 2 \cdot t \cdot e^{-0.05 \cdot t} + 0.25 \cdot t^2 \cdot e^{-0.05 \cdot t} \cdot (-0.05) = \left(0.5 \cdot t - 0.0125 \cdot t^2\right) \cdot e^{-0.05 \cdot t}$$

Extremstellen: $0.5 \cdot t - 0.0125 \cdot t^2 = 0$ auflösen, $t \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 40.0 \end{pmatrix}$

$e^{-0.05 \cdot t} > 0$ für alle t $p(t) := 0.5 \cdot t - 0.0125 \cdot t^2$

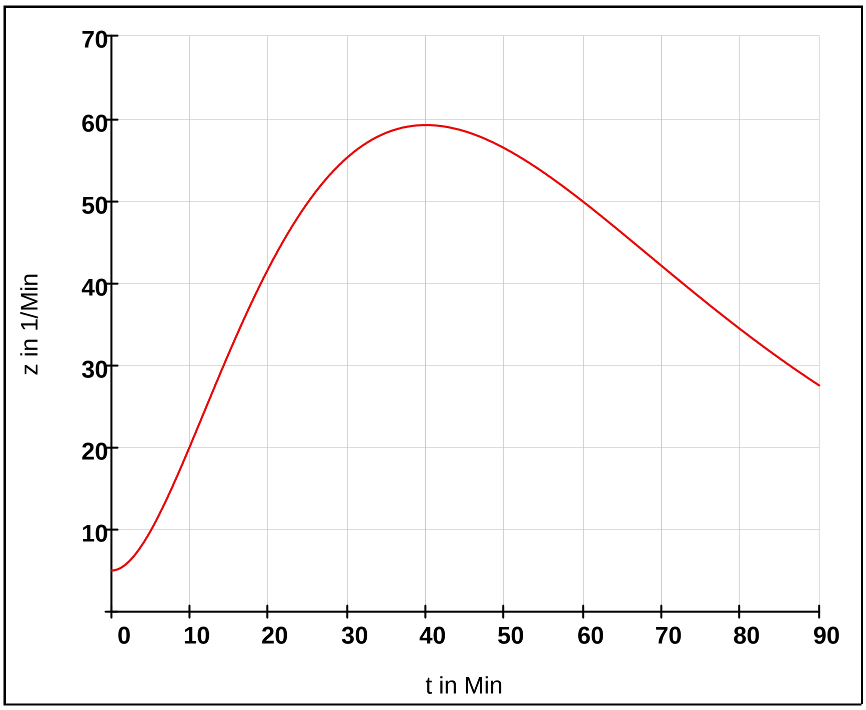


Größte Verkehrsdichte:

$z(40) = 59.134$

Runden: $\text{floor}(z(40)) = 59$

Teilaufgabe 3.4 **(4 BE)**
Zeichnen Sie die Kurve für die Verkehrsdichte in ein Koordinatensystem.
[Maßstab: **1 cm** entspricht **10 min**; **1 cm** entspricht $10 \cdot \frac{1}{\text{min}}$]



Teilaufgabe 3.5 (6 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion Z mit $Z(t) := -0.25 \cdot e^{-0.05 \cdot t} \cdot \left(20 \cdot t^2 + 800 \cdot t + 16000\right) + 5 \cdot t$

mit $0 \le t \le 90$ eine Stammfunktion der Funktion z ist und berechnen Sie $\int_0^{60} z(t)\, dt$.

Interpretieren Sie das Ergebns im Sachzusammenhang.

Zu zeigen: $Z'(t) = z(t)$

$$Z'(t) = -0.25 \cdot \left[e^{-0.05 \cdot t} \cdot (-0.05) \cdot \left(20 \cdot t^2 + 800 \cdot t + 16000\right) + e^{-0.05 \cdot t} \cdot (40 \cdot t + 800)\right] + 5$$

$$Z'(t) = -0.25 \cdot e^{-0.05 \cdot t} \cdot \left[(-0.05) \cdot \left(20 \cdot t^2 + 800 \cdot t + 16000\right) + (40 \cdot t + 800)\right] + 5$$

$$Z'(t) = -0.25 \cdot e^{-0.05 \cdot t} \cdot \left(-t^2 - 40 \cdot t - 800 + 40 \cdot t + 800\right) + 5$$

$$Z'(t) = -0.25 \cdot e^{-0.05 \cdot t} \cdot \left(-t^2\right) + 5 = z(t)$$

$\int_0^{60} z(t)\, dt = Z(60) - Z(0)$ $\quad$ $Z(60) = -1393$ $\quad$ $Z(0) = -4000$

$Z(60) - Z(0) = 2607$

In der Zeit von 7:00 Uhr bis 8:00 Uhr haben insgesamt 2607 Fahrzeuge die Krezung passiert.