Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2013

• Mathematik 13 Nichttechnik - A II - Lösung

Teilaufgabe 1.0
Eine gebrochenrationale Funktion $\mathbf{f: x \mapsto f(x), D_f = IR}$, hat eine Nullstelle bei $\mathbf{x = -1}$, eine Unendlichkeitsstelle (Polstelle) ohne Vorzeichenwechsel an der Stelle $\mathbf{x = 1}$ und eine stetig behebbare Definitionslücke an der Stelle $\mathbf{x = 4}$. Der Graph von f hat ferner eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $\mathbf{y = 0}$.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)
Bestimmen Sie den Funktionsterm f(x), wenn der Nenner ein Polynom dritten Grades ist und außerdem gilt: $\mathbf{f(5) = 3}$.

Allgemeiner Funktionsterm: $f(x,a) := a\cdot\dfrac{(x+1)\cdot(x-4)}{(x-1)^2\cdot(x-4)}$

P(5/3) ∈ G_f: $a_0 := f(5,a) = 3 \rightarrow \dfrac{3\cdot a}{8} = 3 \text{ auflösen}, a \rightarrow 8$

Konkreter Funktionsterm: $f(x) := \dfrac{8\cdot(x+1)\cdot(x-4)}{(x-1)^2\cdot(x-4)}$

Teilaufgabe 1.2.0
Im Folgenden wird die stetige Fortsetzung g der Funktion f betrachtet:
$g(x) := \dfrac{8\cdot x+8}{(x-1)^2}$ mit $\mathbf{D_g = IR \setminus \{1\}}$. Der Graph von g wird mit $\mathbf{G_g}$ bezeichnet.

Teilaufgabe 1.2.1 (3 BE)
Geben Sie die Gleichungen und die Art aller Asymptoten von G_g sowie die Nullstelle von g an.

Senkrechte Asymptote: $x = 1$

Waagrechte Asymptote: $y = 0$

Nullstelle: $x_0 = -1$

Teilaufgabe 1.2.2 (9 BE)
Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_g und ermitteln Sie die Art und die Koordinaten des Extrempunktes von G_g.
[Teilergebnis: $g'(x) = \dfrac{-8\cdot x-24}{(x-1)^3}$]

$$g'(x) = \frac{8\cdot(x-1)^2 - (8\cdot x+8)\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{8\cdot x - 8 - 16\cdot x - 16}{(x-1)^3} = \frac{-8\cdot x - 24}{(x-1)^3}$$

Zählerfunktion: $z'(x) := -8 \cdot x - 24$

Nennerfunktion: $n'(x) := (x-1)^3$

	$G_{z'}$	$x = -3$		$x \neq 1$ $G_{n'}$
Zähler	pos		neg	neg
Nenner	neg		neg	pos
g '(x)	neg		pos	neg
G_g	smf		sms	smf
		TP		Polstelle

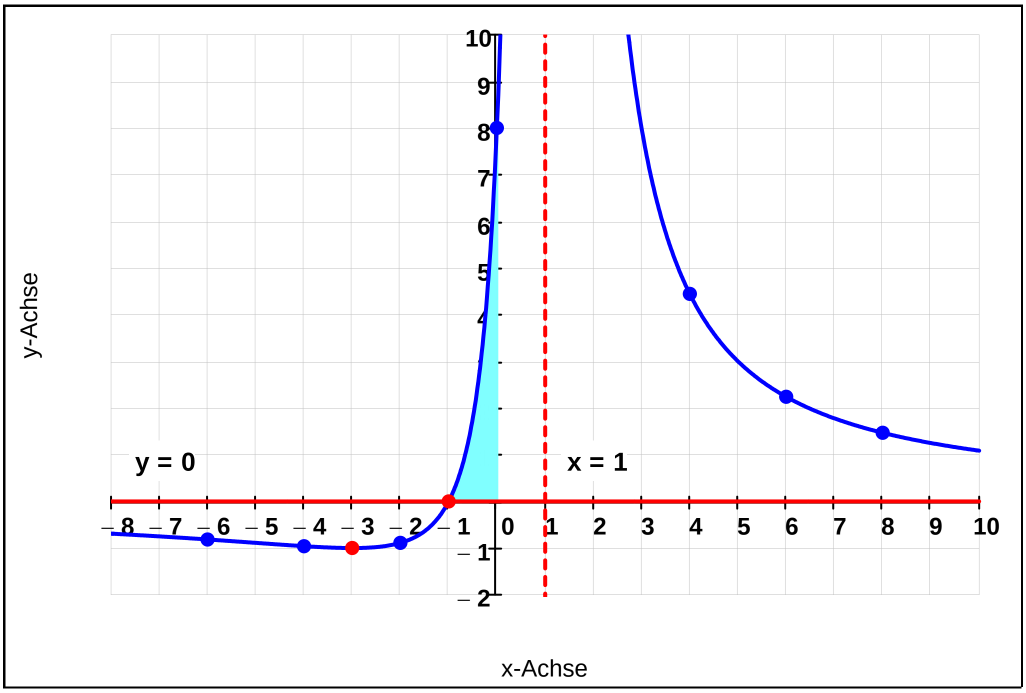
$g(-3) = -1$

Tiefpunkt:

TP(–3 / –1)

G_g ist streng monoton fallend in $]-\infty\ ;\ -3]$, G_g ist streng monoton steigend in $[-3\ ;\ 1[$ und G_g ist streng monoton fallend in $]\ 1\ ;\ \infty\ [$.

Teilaufgabe 1.2.3 **(5 BE)**
Zeichnen Sie die Asymptoten von G_g mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse für $-6 \leq x \leq 8$ in ein Koordinatensystem. Berechnen Sie dazu weitere geeignete Funktionswerte.



Teilaufgabe 1.2.4 (5 BE)

Zeigen Sie, dass gilt: $\int g(x)\,dx = 4\cdot\ln(x-1)^2 - \frac{16}{x-1} + C$ mit $C \in IR$ und berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts der Fläche, die G_g mit den Achsen einschließt.

$$G(x,C) := 4\cdot\ln\left[(x-1)^2\right] - \frac{16}{x-1} + C$$

$$G'(x) = 4\cdot\frac{2\cdot(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{16}{(x-1)^2} = \frac{8\cdot x - 8 + 16}{(x-1)^2} = \frac{8\cdot x + 8}{(x-1)^2} = g(x)$$

$$A = \int_{-1}^{0} g(x)\,dx = G(0) - G(-1)$$

$A := G(0,C) - G(-1,C) \;=\; 8 - 4\cdot\ln(4)$ $\qquad A = 2.45$

Teilaufgabe 2.0

Gegeben ist die Funktion h: $x \mapsto 10\cdot(2-\ln(x))^2$ in der maximalen Definitionsmenge $D_h \subset IR$, Der Graph von h wird mit G_h bezeichnet.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Bestimmen Sie D_h sowie die Lage und die Vielfachheit der Nullstelle von h und untersuchen Sie das Verhalten von h an den Rändern von D_h.

Definitionsmenge: $\qquad D =]\,0\,;\,\infty\,[$

$$h(x) := 10\cdot(2-\ln(x))^2$$

$h(x) = 0 \rightarrow 10\cdot(\ln(x)-2)^2 = 0$ **auflösen**, $x \;\rightarrow e^2$

Zweifache Nullstelle $\qquad x_0 := e^2$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[10\cdot(2-\underbrace{\ln(x)}_{\to\,\infty})^2\right] \rightarrow \infty \qquad\qquad \lim_{x\to\infty}\left[10\cdot(2-\underbrace{\ln(x)}_{\to\,\infty})^2\right] \rightarrow \infty$$

Teilaufgabe 2.2 **(2 BE)**
Begründen Sie nur mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse ohne weitere Berechnungen, dass die Nullstelle der Funktion h ein Tiefpunkt von G_h ist.

Nullstelle von h $x_0 = e^2$ ist zweifach $\Rightarrow$ also auch Nullstelle von h'.

Aus dem Verhalten an den Grenzen folgt, dass die Nullstelle ein Tiefpunkt ist.

Teilaufgabe 2.3 **(7 BE)**
Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_h.

[Teilergebnis: $h''(x) = -20 \cdot \frac{\ln(x) - 3}{x^2}$]

$$h(x) := 10 \cdot (2 - \ln(x))^2$$

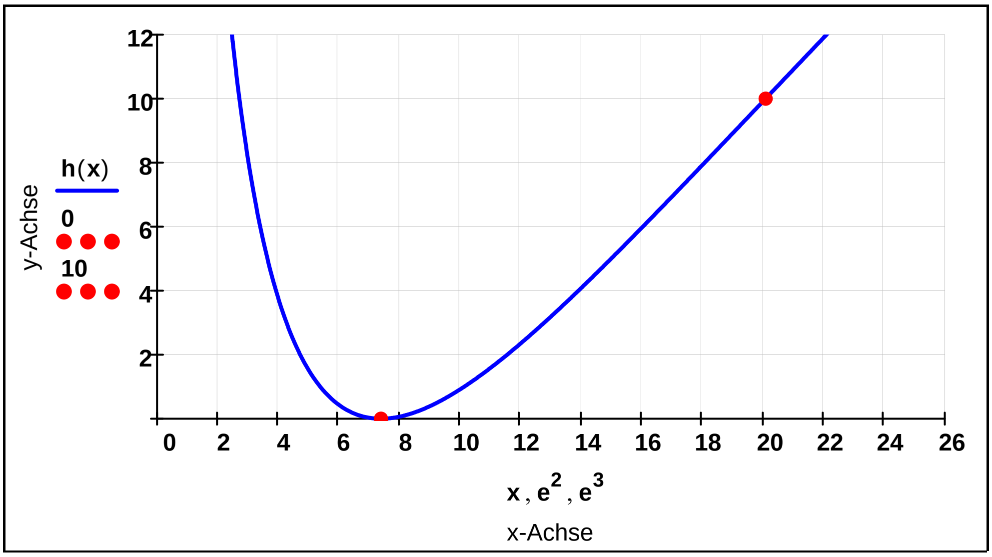
$$h'(x) = 10 \cdot 2 \cdot (2 - \ln(x)) \cdot \left(\frac{-1}{x}\right) = -20 \cdot \frac{(2 - \ln(x))}{x}$$

$$h''(x) = -20 \cdot \frac{\left(\frac{-1}{x}\right) \cdot x - (2 - \ln(x)) \cdot 1}{x^2} = -20 \cdot \frac{\ln(x) - 3}{x^2}$$

$h''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) - 3 = 0 \qquad x_W := e^3$ einfache Nullstelle, also Wendestelle

$h\left(e^3\right) = 10$ Wendepunkt: **WP(** e^3 **/ 10)**

Teilaufgabe 2.4 **(4 BE)**
Skizzieren Sie G_h für $0 < x \le 24$ in ein Koordinatensystem.
[Maßstab: 1 LE entspricht 0,5 cm]



Teilaufgabe 3.0
Morgens um 7:00 Uhr wird eine Tasse heißer Tee eingeschenkt. Der Abkühlvorgang des Tees kann durch die Funktionsgleichung $T(t) = 18 + a \cdot e^{-c \cdot t}$ (mit $a, c > 0, t \geq 0$) beschrieben werden, wobei T(t) die Temperatur des Tees in Grad Celsius angibt und t die Zeit in Minuten. Der Abkühlvorgang beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ um 7:00 Uhr.
Bei der Rechnung kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)
Nach 2 Minuten hat der Tee eine Temperatur von 74°C und um 7:25 Uhr ist er bereits auf 28°C abgekühlt. Bestimmen Sie aus diesen Angaben die Werte der Konstanten a und c.

$$T(t, a, c) := 18 + a \cdot e^{-c \cdot t}$$

$$T(2, a, c) = 74 \rightarrow a \cdot e^{-2 \cdot c} + 18 = 74 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot e^{-2 \cdot c} = 56 \qquad (1)$$

$$T(25, a, c) = 28 \rightarrow a \cdot e^{-25 \cdot c} + 18 = 28 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot e^{-25 \cdot c} = 10 \qquad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \qquad \frac{a \cdot e^{-2 \cdot c}}{a \cdot e^{-25 \cdot c}} = \frac{56}{10} \quad \Leftrightarrow \quad e^{23 \cdot c} = \frac{56}{10}$$

$$\Leftrightarrow \quad c := \frac{1}{23} \cdot \ln\left(\frac{56}{10}\right) \qquad c = \frac{\ln\left(\frac{28}{5}\right)}{23} = 0.075$$

c einsetzen in (1) $\quad a := \frac{56}{e^{-2 \cdot 0.075}} \qquad a = 65$

Setzen Sie in folgenden Teilaufgaben $a = 65$ und $c = 0.075$.

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)
Ermitteln Sie die Temperatur des Tees um 7:00 Uhr und auf welche Endtemperatur sich der Tee langfristig abkühlen wird. Erläutern Sie die Bedeutung der Endtemperatur im Sachzusammenhang.

$$T(t) := 18 + 65 \cdot e^{-0.075 \cdot t}$$

um 7:00 Uhr: $\quad T(0) = 83$

Nach langer Zeit: $\quad \lim_{t \to \infty} \left(18 + 65 \cdot e^{-0.075 \cdot t}\right) \rightarrow 18.0$

18° entspricht der Umgebungstemperatur.

Teilaufgabe 3.3 (4 BE)
Bestimmen Sie die Werte der Ableitung von T nach 3 Minuten und nach 25 Minuten.
Erläutern Sie die Werte im Sachzusammenhang.

$$T'(t) := -65 \cdot 0.075 \cdot e^{-0.075 \cdot t}$$

$$T'(3) = -3.89 \qquad T'(25) = -0.75$$

Der Tee kühlt nach 3 Minuten um 3,9°C pro Minute ab und nach 25 Minuten um 0,75°C ab.
Der Tee kühlt also anfangs stärker ab als später.

Teilaufgabe 3.4 (3 BE)
Der Abkühlvorgang wird als abgeschlossen bezeichnet, wenn die Temperatur des Tees unter 19°C fällt. Berechnen Sie, um wie viel Uhr (gerundet auf ganze Minuten) dies der Fall ist.

$$T(t) = 19 \quad \Leftrightarrow \quad 18 + 65 \cdot e^{-0.075 \cdot t} = 19$$

$$-0.075 \cdot t = \ln\left(\frac{1}{65}\right) \qquad t_{end} := \frac{-1}{0.075} \cdot \ln\left(\frac{1}{65}\right) \qquad t_{end} = 56$$

Um 7:56 Uhr ist der Abkühlungsvorgang abgeschlossen.